Hans Walser, [20180301]

Isogonale Vielecke

Anregung: V. A. K., D.

1 Worum geht es

Die Abbildung 1 zeigt ein isogonales Vieleck. Es hat sechs gleiche Winkel. Weiter hat es dieselben Symmetrien wie das regelmäßige Dreieck.

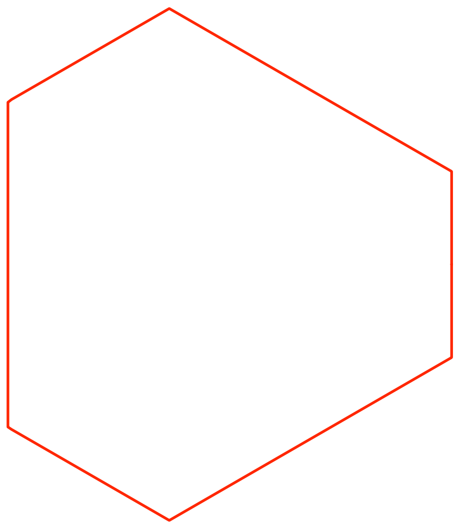

Abb. 1: Isogonales Vieleck

Dieses Vieleck soll nun in Polarkoordinaten $(r(\theta),\theta)$ dargestellt werden. Dabei, und das ist das Neckische, soll die Funktion $r(\theta)$ ohne Fallunterscheidungen formuliert werden.

2 Lösung

Die Funktion

$$r(\theta)=\min\left(\frac{R_1}{\cos\left(\arctan\left(\left|\tan\left(\frac{\theta n}{4}\right)\right|\right)\frac{4}{n}-\frac{\pi}{n}\right)},\frac{R_2}{\cos\left(\arctan\left(\left|\tan\left(\frac{\theta n+\pi}{4}\right)\right|\right)\frac{4}{n}-\frac{\pi}{n}\right)}\right) \tag{1}$$

löst das Problem. Herleitung in Anlehnung an [1] .

Die vorkommenden Parameter haben folgende geometrische Bedeutung: n ist die halbe Eckenzahl des isogonalen Vieleckes. R_1 ist der Abstand der langen Seiten vom Ursprung, R_2 der Abstand der kurzen Seiten vom Ursprung.

Im Beispiel der Abbildung 1 ist $n = 3$, $R_1 = 1$ und $R_2 = 1.2$.

Für $R_2 = R_1$ erhalten wir das regelmäßig $2n$-Eck.

3 Weitere Beispiele

Die Abbildung 2 zeigt den Fall für $n = 4$, $R_1 = 1$ und $R_2 = 1.2$. Wir haben die Symmetrien des Quadrates.

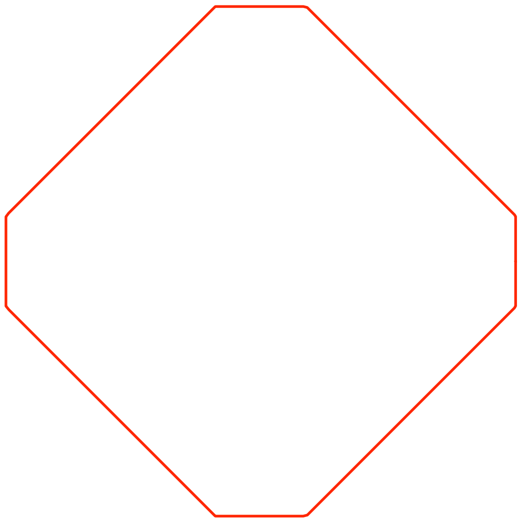

Abb. 2: Isogonales Achteck

Die Formel (1) funktioniert auch für rationale n. Die Abbildung 3 zeigt die Situation für $n = 4.5$, $R_1 = 1$ und $R_2 = 1.2$.

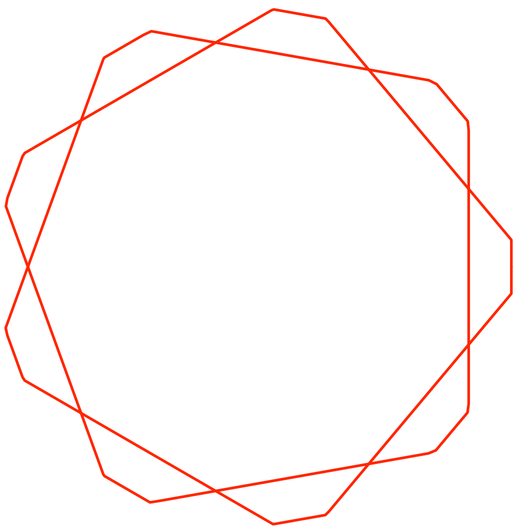

Abb. 3: Isogonales Achtzehneck

Wir müssen für den Polarwinkel θ zwei Umläufe vorsehen: $\theta \in [0,4\pi]$. Der Parameter n ist daher nur noch ein Viertel der Eckenzahl.

Wir haben die Symmetrien des regelmäßigen Neuneckes.

4 Diskussion der Lösung

Die Formel (1) enthält auf den ersten Blick keine Fallunterscheidung. Auf den zweiten Blick sehen wir, dass die Betragsfunktion und die Minimumfunktion vorkommen. Beides sind von der Definition her Funktionen mit einer dichotomen Fallunterscheidung. Allerdings können wir dieses Problem beheben.

4.1 Betragsfunktion

Gemäß üblicher Definition ist:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{sonst} \end{cases} \tag{2}$$

Wir können diese Fallunterscheidung umgehen mit:

$$|x| = \sqrt{x^2} \tag{3}$$

4.2 Minimumfunktion

Gemäß üblicher Definition ist:

$$\min(a,b) = \begin{cases} a & \text{falls } a \leq b \\ b & \text{sonst} \end{cases} \tag{4}$$

Wir können diese Fallunterscheidung umgehen mit:

$$\min(a,b) = \tfrac{1}{2}\left(a + b - |a - b|\right) \tag{5}$$

Die in (5) erscheinende Betragsfunktion können wir durch (3) substituieren.

5 Programm

Die Abbildung 4 zeigt das für die Abbildung 1 verwendete Programm (Maple):

```
restart: with(plots): with(plottools):

n := 3: # halbe Eckenzahl

R1 := 1: # erster Radius

R2 := 1.2: # zweiter Radius

r := t -> min(R1/cos(arctan(abs(tan(t*n/4)))*4/n-Pi/n),
R2/cos(arctan(abs(tan((t*n+Pi)/4)))*4/n-Pi/n)):

Figur := plot(r(t), t=0..2*Pi, thickness=1, color=red,
coords = polar):

display([Figur], scaling = constrained, axes = none);
```

Abb. 4: Programm

Website

[1] Hans Walser: Polardarstellung eines regelmäßigen Vielecks (abgerufen 01.03.2018):
www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/P/Polardarst_Vieleck/Polardarst_Vieleck.htm