Hans Walser, [20170322]

Irrationale Zahlen

1 Worum geht es?

Es wird versucht, die Existenz nicht rationaler Zahlen ohne indirekten Beweis zu führen.

2 Rationale Zahlen im Dezimalsystem

Rationale Zahlen („Brüche“) haben im Dezimalsystem entweder eine abbrechende oder dann eine periodische Dezimalbruchentwicklung.

Für die Umrechnung eines Bruches $\frac{p}{q}$ in einen Dezimalbruch kann mit dem Dirichletschen Schubfachprinzip (pigeonhole principle) gezeigt werden, dass die Periodenlänge höchstens $q-1$ beträgt. Da beim stellenweisen Divisionsalgorithmus nur Reste aus $\{0, 1, \ldots, q-1\}$ auftreten können, muss sich bei einem nicht abbrechenden Beispiel spätestens nach $q-1$ Schritten ein früherer Rest wiederholen. Damit fängt die Periode an.

Ein endlicher Dezimalbruch kann zunächst als Bruch mit einer Zehnerpotenz im Nenner geschrieben und dann allenfalls gekürzt werden. Ein periodischer Dezimalbruch x der Periodenlänge k wird zunächst mit 10^k multipliziert. Davon wird x subtrahiert und schließlich kann x als Bruch mit dem Nenner $10^k - 1$ geschrieben werden. Der Zähler ist dann schlimmstenfalls eine Dezimalzahl mit abbrechender Entwicklung. Durch geeignetes Erweitern kann ein Bruch mit ganzzahligem Zähler und Nenner erreicht werden.

Beispiel:

$$x = 0.17\overline{458} \tag{1}$$

Die Periodenlänge k ist 3. Wir multiplizieren mit $10^3 = 1000$.

$$1000x = 174.58\overline{458} \tag{2}$$

Wir subtrahieren (1) von (2).

$$999x = 174.58\overline{458} - 0.17\overline{458} = 174.41 \tag{3}$$

Somit ist:

$$x = \frac{174.41}{999} = \frac{17441}{99900} \tag{4}$$

3 Nicht rationale Zahlen im Dezimalsystem

Ein nicht abbrechender aperiodischer Dezimalbruch ist keine rationale Zahl. Ein Beispiel ist:

$$x = 0.1101000100000001\ldots \tag{5}$$

Es handelt sich hier um die Reihe:

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{10}\right)^{2^k} = \left(\tfrac{1}{10}\right)^{1} + \left(\tfrac{1}{10}\right)^{2} + \left(\tfrac{1}{10}\right)^{4} + \left(\tfrac{1}{10}\right)^{8} + \left(\tfrac{1}{10}\right)^{16} + \cdots \tag{6}$$

Die Aperiodizität ist offensichtlich.