Hans Walser, [20180908]

Invarianzbeweis für den Satz des Pythagoras

Idee: Rainer Kaenders, Bonn

1 Die Leiter an der Wand

Wir gehen aus von der berühmten „Leiter an der Wand“. Die Abbildung 1 zeigt zwei Positionen A_1B_1 und A_2B_2. Die beiden Strecken A_1B_1 und A_2B_2 sind also gleich lang.

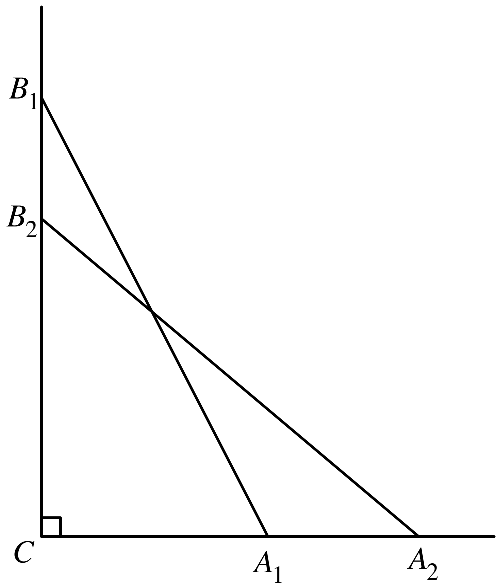

Abb. 1: Leiter an der Wand

2 Drehung

Da die beiden Strecken A_1B_1 und A_2B_2 gleich lang sind, können sie durch eine Drehung ineinander übergeführt werden. Das Drehzentrum D finden wir als Schnittpunkt beiden Mittelsenkrechten zu den Strecken A_1A_2 beziehungsweise B_1B_2 (Abb. 2).

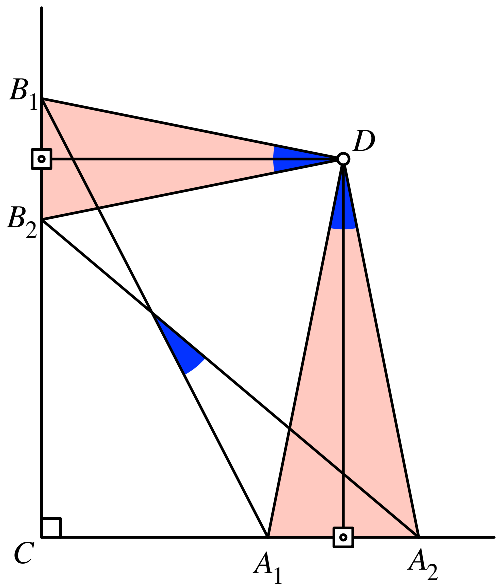

Abb. 2: Drehzentrum

3 Ähnliche Dreiecke

Die beiden Dreiecke A_1A_2D und B_1B_2D sind gleichschenklig. Dies folgt aus dem Prinzip der Drehung. Zudem haben sie denselben Spitzenwinkel, nämlich den Drehwinkel. Sie sind also ähnlich. Mit der üblichen Bezeichnung für die beiden rechtwinkligen Dreiecke A_1B_1C und A_2B_2C hat das Dreieck A_1A_2D die Basis $b_2 - b_1$ und die Höhe $\frac{1}{2}(a_1 + a_2)$. Das Dreieck B_1B_2D hat dies Basis $a_1 - a_2$ und die Höhe $\frac{1}{2}(b_1 + b_2)$. Auf Grund der Ähnlichkeit der beiden Dreiecke ist:

$$\frac{\frac{1}{2}(a_1+a_2)}{b_2-b_1} = \frac{\frac{1}{2}(b_1+b_2)}{a_1-a_2} \tag{1}$$

Daraus folgt:

$$(a_1 + a_2)(a_1 - a_2) = (b_1 + b_2)(b_2 - b_1) \tag{2}$$

Die dritte binomische Formel liefert:

$$a_1^2 - a_2^2 = b_2^2 - b_1^2 \quad \Rightarrow \quad a_1^2 + b_1^2 = a_2^2 + b_2^2 \tag{3}$$

Die Summe der Kathetenquadrate ist also beim Verschieben der Leiter invariant. Die Größe dieser Invariante finden wir durch den Grenzfall einer waagerechten oder senkrechten Leiter.

Damit ist der Satz des Pythagoras einmal mehr bewiesen.

4 Umkreise

Das Folgende hat nichts mit dem Satz des Pythagoras zu tun und ist bloß eine geometrische Spielerei.

Wir bezeichnen den Schnittpunkt der beiden gleich langen Strecken A_1B_1 und A_2B_2 mit S (Abb. 3). Die Umkreise der beiden Dreiecke A_1A_2S und B_1B_2S schneiden sich orthogonal.

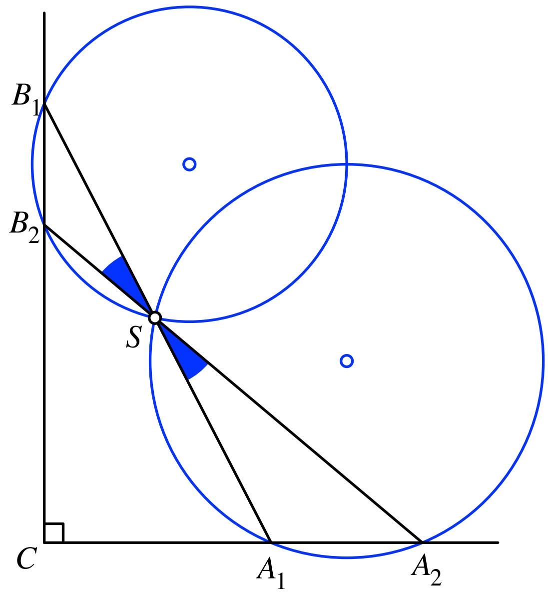

Abb. 3: Umkreise

Die Abbildung 4 liefert den Beweis dazu.

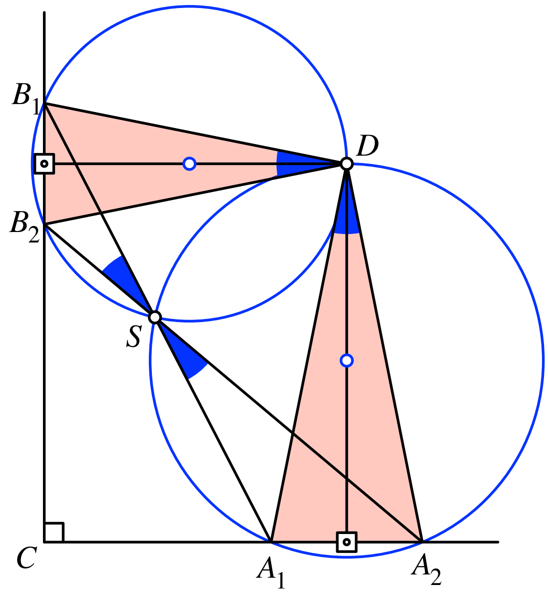

Abb. 4: Beweisfigur

Wie ist es, wenn wir bei C keinen rechten, sondern einen beliebigen Winkel haben?