Hans Walser, [20140623]

# Inkreise

Idee und Anregung: H. K. S., L.

## 1 Worum geht es?

Optimierungsfragen bei Inkreisen.

### 1.1 Beispiel 1

Den Sektoren eines regelmäßigen $n$-Eckes werden Inkreise einbeschrieben (Abb. 1).

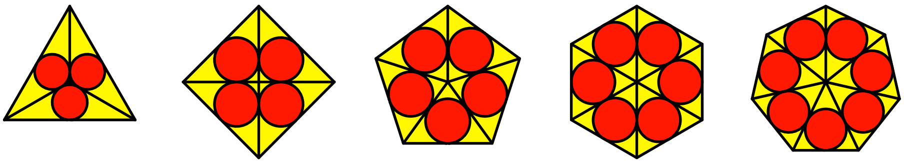

**Abb. 1: Inkreise in Sektoren**

Für welches $n$ ist der Flächenanteil der Inkreise gemessen an der Gesamtfigur am größten?

### 1.2 Beispiel 2

Die Inkreise werden gemäß Abbildung 2 einbeschrieben.

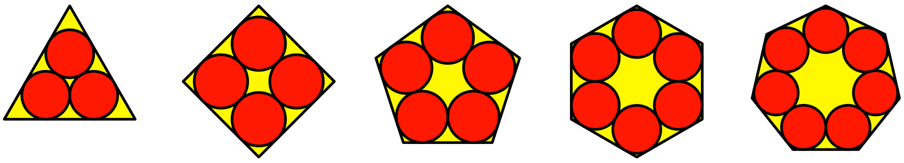

**Abb. 2: Malfatti**

### 1.3 Beispiel 3

Kongruente Kreise werden einem großen Kreis gemäß Abbildung 3 einbeschrieben.

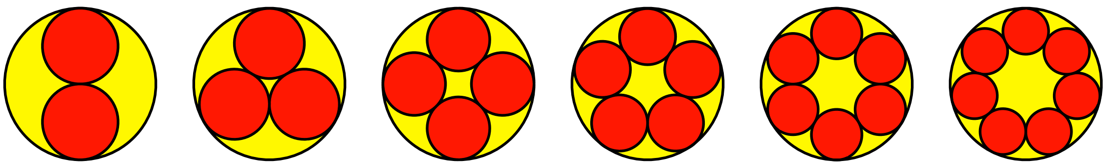

**Abb. 3: Kreise im Kreis**

## 2 Bearbeitung der Beispiele

### 2.1 Beispiel 1

Wir normieren den Umkreisradius des $n$-Eckes auf 1 und studieren ein gleichschenkliges Dreieck $ABM$ mit der Schenkellänge 1 und dem Spitzenwinkel $2t$ (Abb. 4). In einem Sektordreieck eines regelmäßigen $n$-Eckes ist $t = \pi/n$.

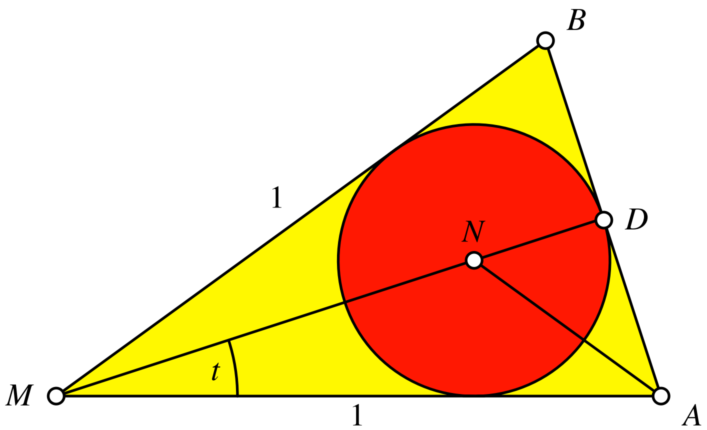


**Abb. 4: Gleichschenkliges Dreieck**

Der Flächeninhalt des Dreieckes $ABM$ ist:

$$A_{\Delta ABM} = \cos(t)\sin(t)$$

Wegen $\measuredangle DAN = \frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}$ erhalten wir:

$$\overline{DN} = \sin(t)\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right)$$

Somit ergibt sich für die Inkreisfläche:

$$A_{\odot} = \pi \sin^2(t)\tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right)$$

Der Flächenanteil $R(t)$ des Inkreises ist daher:

$$R(t) = \frac{A_{\odot}}{A_{\Delta ABM}} = \frac{\pi \sin^2(t)\tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right)}{\cos(t)\sin(t)} = \pi \tan(t)\tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right)$$

Im regelmäßigen $n$-Eck ergibt sich der Flächenanteil $S(n)$:

$$S(n) = \pi \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)\tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2n}\right)$$

Die Tabelle 1 zeigt die numerischen Werte.

| $n$ | $S(n)$ |
|---|---|
| 3 | 0.3906748059 |
| 4 | 0.5390120850 |
| 5 | 0.5925741132 |
| 6 | 0.6045997883 |
| 7 | 0.5973173815 |
| 8 | 0.5809775641 |
| 9 | 0.5606209262 |
| 10 | 0.5388253167 |
| 11 | 0.5169325464 |
| 12 | 0.4956364887 |
| 13 | 0.4752808620 |
| 14 | 0.4560165897 |
| 15 | 0.4378877625 |

**Tab 1: Numerische Werte für Beispiel 1**

Das Maximum ist beim regelmäßigen Sechseck.

Die rote Kurve der Abbildung 5 stellt die Situation grafisch dar. Die blaue Kurve gibt die Ableitung.

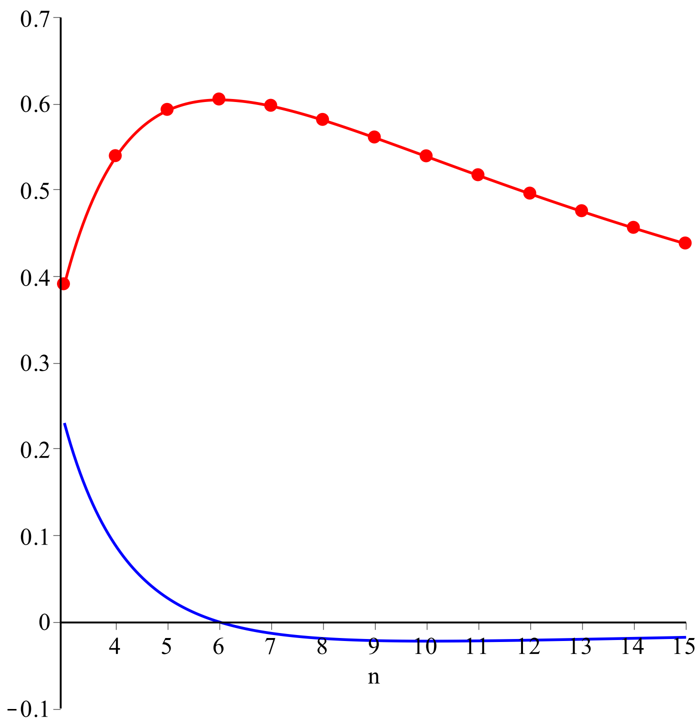


**Abb. 5: Grafische Darstellung**

## 2.2 Beispiel 2

Die Abbildung 6 zeigt einen Ausschnitt.

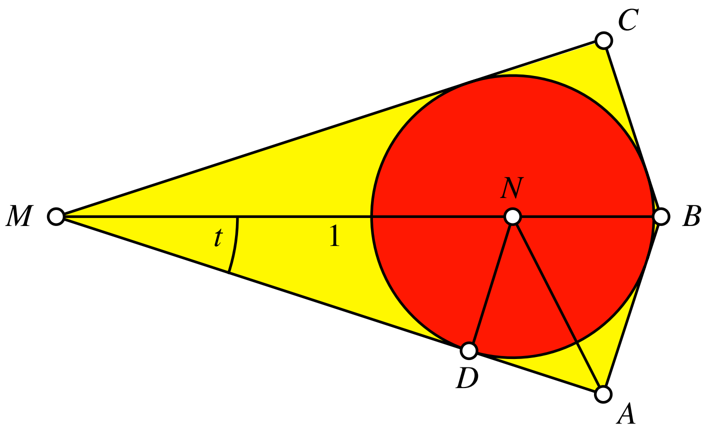


**Abb. 6: Ausschnitt**

Für den Flächeninhalt des Drachenviereckes *MABC* erhalten wir:

$$A_{MABC} = \cos(t)\sin(t)$$

Es ist $\measuredangle AMN = \frac{3}{4}\pi - t$ und $\overline{MA} = \cos(t)$. Der Sinussatz liefert:

$$\frac{\overline{AN}}{\sin(t)} = \frac{\cos(t)}{\sin\left(\frac{3}{4}\pi - t\right)} \quad \Rightarrow \quad \overline{ND} = \frac{\overline{AN}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\cos(t)\sin(t)}{\sin\left(\frac{3}{4}\pi - t\right)}$$

Somit hat der rote Inkreis den Flächeninhalt:

$$A_{\odot} = \pi\frac{1}{2}\frac{\cos^2(t)\sin^2(t)}{\sin^2\left(\frac{3}{4}\pi - t\right)}$$

Der Inkreis hat den Flächenanteil:

$$R(t) = \pi\frac{1}{2}\frac{\cos(t)\sin(t)}{\sin^2\left(\frac{3}{4}\pi - t\right)}$$

Mit $t = \pi/n$ ist:

$$S(n) = R\left(\frac{\pi}{n}\right) = \pi\frac{1}{2}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{3}{4}\pi - \frac{\pi}{n}\right)}$$

Die Tabelle 2 zeigt die numerischen Werte:

| $n$ | $S(n)$ |
|---|---|
| 3 | 0.7290091126 |
| 4 | 0.7853981635 |
| 5 | 0.7656959550 |
| 6 | 0.7290091126 |
| 7 | 0.6892335410 |
| 8 | 0.6506451425 |
| 9 | 0.6146189620 |
| 10 | 0.5814960895 |
| 11 | 0.5512229720 |
| 12 | 0.5235987756 |
| 13 | 0.4983777586 |
| 14 | 0.4753125830 |
| 15 | 0.4541720216 |

**Tab. 2: Beispiel 2**

Das Maximum ist nun beim Quadrat.

Die rote Kurve der Abbildung 7 zeigt die Situation grafisch. Die blaue Kurve gibt die Ableitung.

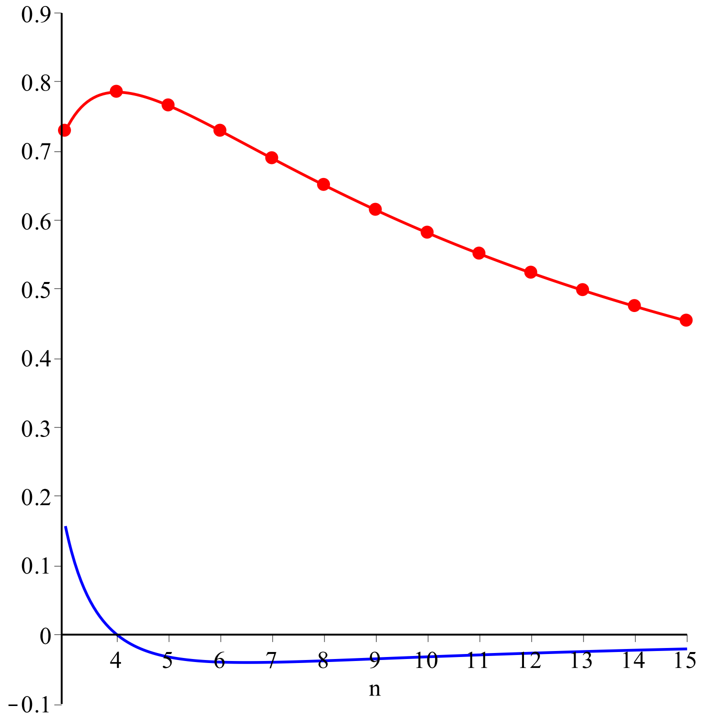


**Abb. 7: Beispiel 2**

## 2.3 Beispiel 3

Die Abbildung 8 ist an die Abbildung 4 angelehnt.

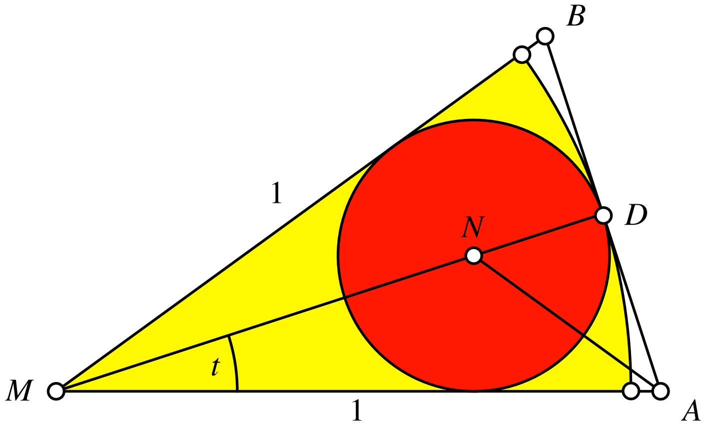


**Abb. 8: Kreissektor**

Der Flächeninhalt des Kreissektors ist:

$$A_{\text{Kreissektor}} = t\cos^2(t)$$

Für den Inkreis erhalten wir nach wie vor den Flächeninhalt:

$$A_{\odot} = \pi\sin^2(t)\tan^2\left(\tfrac{\pi}{4} - \tfrac{t}{2}\right)$$

Damit ergibt sich der Flächenanteil $R(t)$:

$$R(t) = \tfrac{\pi}{t}\tan^2(t)\tan^2\left(\tfrac{\pi}{4} - \tfrac{t}{2}\right)$$

Mit $t = \pi/n$ ist:

$$S(n) = n\tan^2\left(\tfrac{\pi}{n}\right)\tan^2\left(\tfrac{\pi}{4} - \tfrac{\pi}{2n}\right)$$

Die Tabelle 3 zeigt die numerischen Werte. Dabei ist auch noch der Wert für $n = 2$ eingefügt worden.

| $n$ | $S(n)$ |
|---|---|
| 2 | 0.5 |
| 3 | 0.6461709274 |
| 4 | 0.6862915016 |
| 5 | 0.6852102450 |
| 6 | 0.6666666667 |
| 7 | 0.6409393118 |
| 8 | 0.6128071030 |
| 9 | 0.5845582710 |
| 10 | 0.5572809001 |
| 11 | 0.5314616443 |
| 12 | 0.5072792491 |
| 13 | 0.4847543631 |
| 14 | 0.4638282272 |
| 15 | 0.4444047692 |

**Tab. 3: Beispiel 3**

Wir haben rationale Werte für $n = 2$ und $n = 6$. Das Maximum ist bei $n = 4$.

Die rote Kurve der Abbildung 9 zeigt die Situation grafisch. Die blaue Kurve gibt die Ableitung.

Wenn wir für $n$ mit reellen Werten arbeiten, ist das Maximum zwischen 4 und 5.

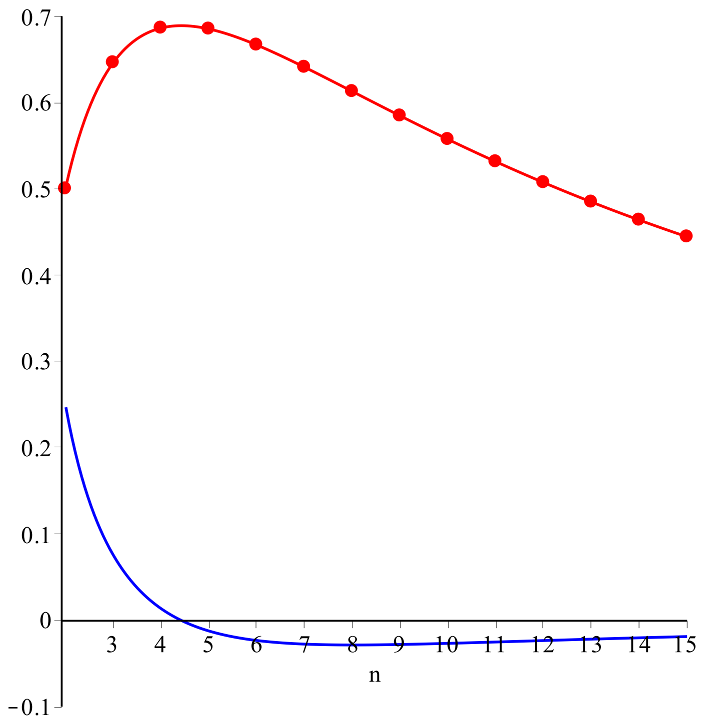


**Abb. 9: Beispiel 3**