Hans Walser, [20180611a]

Hühnergatter

1 Worum geht es?

Eine uralte, aber immer wieder zitierte (Friesen 2018, S. 171) Schulaufgabe ist der Hühnerzaun vor einer Wand. Seine Gesamtlänge ist gegeben, der Zaun soll rechteckig sein, an der Wand braucht es keinen Zaun. Die Bodenfläche soll maximal sein.

Die Lösung ist das halbe Quadrat (isoperimetrisches Problem).

Wie sieht es nun aus, wenn das Gatter auch gegen oben gebaut werden soll, etwa als Schutzmaßnahme gegen räuberische oder erkrankte Wildvögel?

2 Die erweiterte Aufgabe

Für ein Hühnergehege stehen insgesamt $A = 54\ \text{m}^2$ Drahtgitter zur Verfügung. Das Gehege soll auch nach oben abgegittert sein. Die Höhe des Geheges ist $h = 2$ m. Das Gehege steht an einer Hauswand und soll einen rechteckigen Grundriss haben.

Die Grundrissfläche B soll maximal werden.

3 Bearbeitung

Mit a und b bezeichnen wir die zur Hauswand parallele beziehungsweise rechtwinkligen Reckteckseiten des Grundrisses B.

Wegen $A = 54$ und $h = 2$ ist $0 \leq a \leq 27$.

Zu optimieren ist die Zielfunktion:

$$B(a,b) = ab \tag{1}$$

unter der Nebenbedingung (Gitterfläche):

$$ah + 2bh + ab - A = 0 \tag{2}$$

3.1 Schulisches Vorgehen

Wegen $A = 5$ und $h = 2$ erhalten wir aus (2):

$$b = \tfrac{54-2a}{4+a} \tag{3}$$

Eingesetzt in (1) ergibt:

$$B(a) = a\tfrac{54-2a}{4+a} \tag{4}$$

Die Abbildung 1 zeigt den relevanten Ausschnitt des Funktionsgraphen.

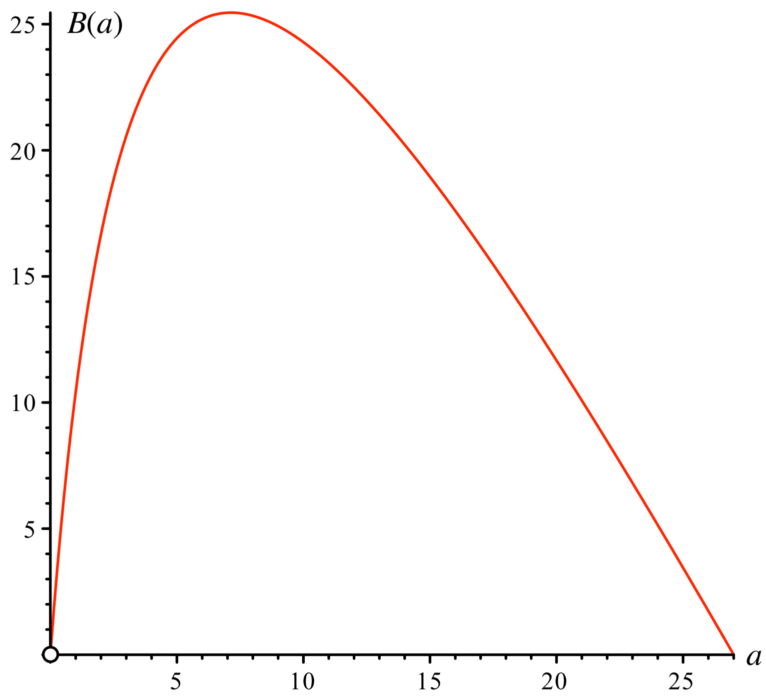

Abb. 1: Funktionsgraph

Diese Funktion hat für $0 \leq a \leq 27$ das Maximum in:

$$a = -4 + 2\sqrt{31} \approx 7.14 \tag{5}$$

Für b ergibt sich:

$$b = -2 + \sqrt{31} \approx 3.57 \tag{6}$$

Der Grundriss ist nach wie vor ein halbes Quadrat.

3.2 Allgemeine Lösung

Wir definieren die Hilfsfunktion:

$$F(a,b,\lambda) = B(a,b) - \lambda(ah + 2bh + ab - A) = ab - \lambda(ah + 2bh + ab - A) \tag{7}$$

Durch Nullsetzen des Gradienten

$$\mathrm{grad}(F) = 0 \tag{8}$$

erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial a} &= b - \lambda h - \lambda b = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial b} &= a - 2\lambda h - \lambda a = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} &= -ac - 2bh - ab + A = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

Dies ist ein nichtlineares Gleichungssystem für a,b,λ. Für a und b erhalten wir mit CAS die positiven Lösungen:

$$a = -2h + \sqrt{4h^2 + 2A}, \quad b = -h + \tfrac{1}{2}\sqrt{4h^2 + 2A} \tag{10}$$

Es ist also auch allgemein $a = 2b$.

Literatur

Friesen, Marita (2018): Visualisierungen im Mathematikunterricht. Verknüpfung mit anderen Darstellungen und optimale Nutzung. MNU Journal - Ausgabe 3.2018 – S. 170-175 – ISSN 0025-5866.