Hans Walser, [20130222a]

Höhensatz

Anregung: L. H.-H.

1 Arbelos und Kreis des Archimedes

Die Abbildung 1 zeigt rot das „Schustermesser“ (Arbelos) und blau den Kreis des Archimedes.

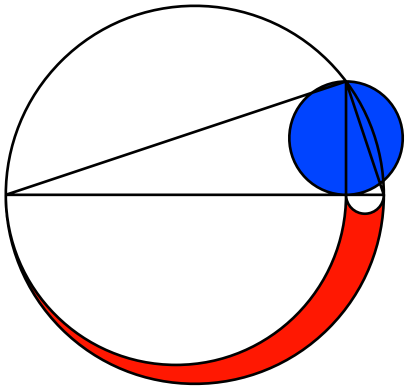

Abb. 1: Rot = Blau

Die beiden Figuren sind flächengleich. Zum Beweis kann der Höhensatz verwendet werden.

Der Kreis des Archimedes hat die Dreieckshöhe als Symmetrieachse. Der Arbelos berücksichtigt die beiden Hypotenusenabschnitte in gleicher Weise.

2 Der unschöne Höhensatz

Natürlich ist der Höhensatz selber schön, nur die in der Schule üblichen Visualisierungen sind es nicht. Die Abbildung 2 zeigt vier Visualisierungen des Höhensatzes. Keine dieser Darstellungen ist bezüglich der Dreieckshöhe ausgeglichen. Das Höhenquadrat liegt asymmetrisch zur Dreieckshöhe, von den beiden Hypotenusenabschnitten ist einer waagerecht, der andere senkrecht verarbeitet.

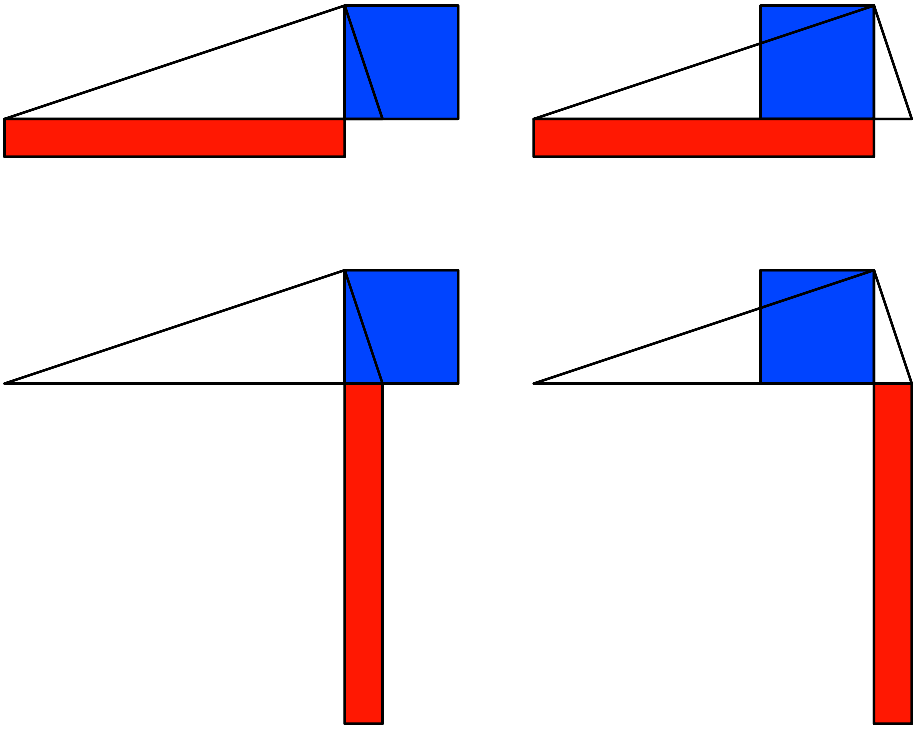

Abb. 2: Rot = Blau

3 Der schöne Höhensatz

Die Frage ist, ob die Figur der Abbildung 1 „vereckigt" werden kann, so dass eine ausgeglichene Visualisierung des Höhensatzes entsteht.

Die Abbildung 3 zeigt einen Lösungsvorschlag. Bis auf den Thaleskreis sind alle Kreise vereckigt worden.

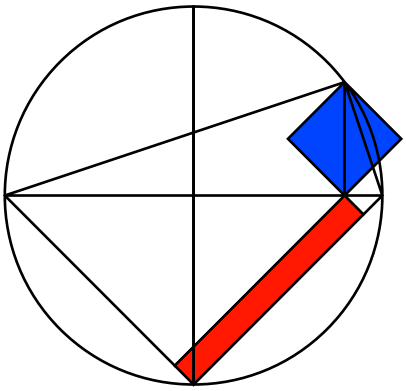

Abb. 3: Rot = Blau

Die Flächenstücke sind im Vergleich zu denen der Abbildung 2 halb so groß.

4 Variationen

Die Abbildung 4 zeigt drei Variationen.

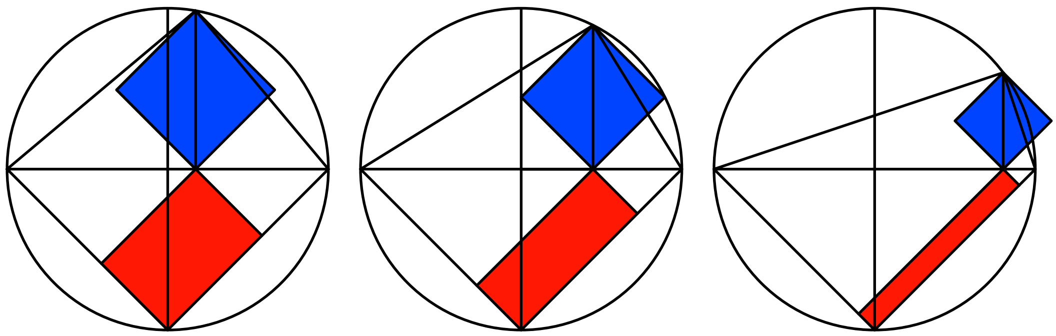

Abb. 4: Drei Variationen

In allen drei Beispielen ist die obere Quadratecke auf dem Thaleskreis, die untere Quadratecke im Höhenfußpunkt des rechtwinkligen Dreieckes.

Interessant sind die linke und die rechte Quadratecke. In der ersten Figur liegen die linke Quadratecke links von der senkrechten Linie des Fadenkreuzes und die rechte Quadratecke innerhalb des Thaleskreises. In der mittleren Figur liegen die linke Quadratecke genau auf der senkrechten Linie des Fadenkreuzes und zudem die rechte Quadratecke genau auf dem Thaleskreis. In der dritten Figur liegen die linke Quadratecke rechts der senkrechten Linie des Fadenkreuzes und die rechte Quadratecke außerhalb des Thaleskreises. Die Abbildung 5 zeigt die Bahnkurve der linken Quadratecke (magenta) und der rechten Quadratecke (zyan).

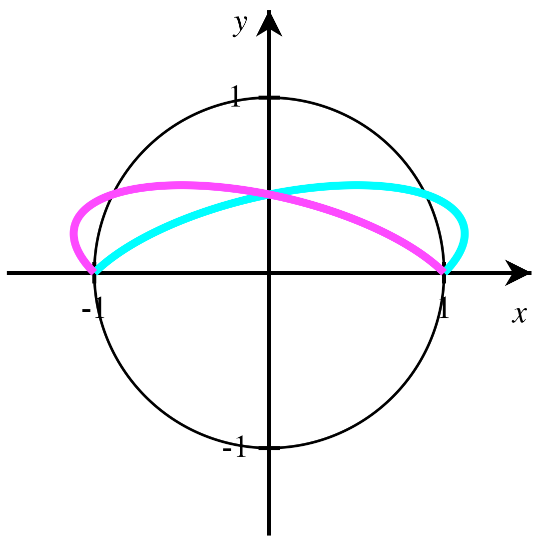

Abb. 5: Bahnkurven

Diese Bahnkurven haben die Parameterdarstellungen:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(t) - \frac{1}{2}\sin(t) \\ \frac{1}{2}\sin(t) \end{bmatrix}, t \in [0,\pi] \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(t) + \frac{1}{2}\sin(t) \\ \frac{1}{2}\sin(t) \end{bmatrix}, t \in [0,\pi]$$

Es handelt sich um halbe Ellipsen.

5 Sonderfall und Goldener Schnitt

Interessant ist der Übergangsfall der mittleren Figur in Abbildung 4. In diesem Fall sind die Kathetenlängen des rechtwinkligen Dreiecks im Verhältnis des Goldenen Schnitts. Das Dreieck kann zu einem Goldenen Rechteck ergänzt werden (Abb. 6).

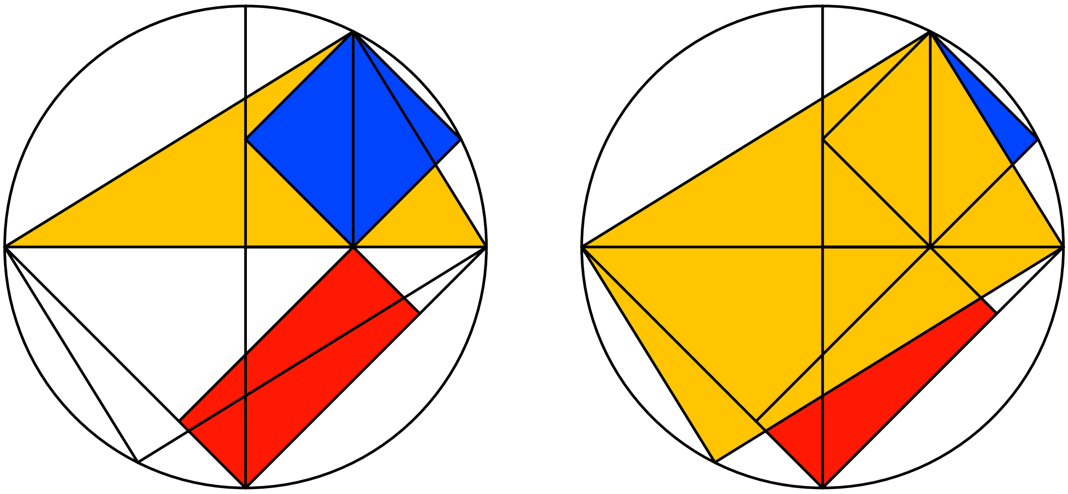

Abb. 6: Goldenes Rechteck

Das Verhältnis des Goldenen Schnittes findet sich auch anderswo. Die Abbildung 7 zeigt zwei Beispiele. Der Major ist jeweils blau, der Minor rot eingetragen.

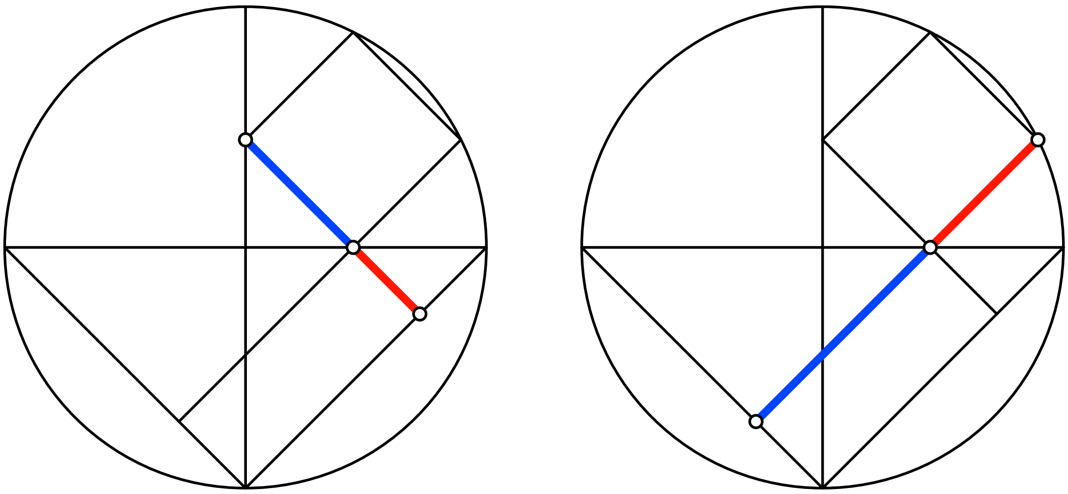

Abb. 7: Verhältnis des Goldenen Schnittes