Hans Walser, [20080908a], [20131229]

Höhenabschnitte

Wir beweisen einen Satz (Satz von Segner) über Höhenabschnitte im Dreieck.

1 Segner an Euler

Am 29. Januar 1763 schrieb Segner in einem Brief an Euler:

„... das schœne Problem, welches Er Wohlgb. mir mitzutheilen die Geneigt[heit] haben ist einige Probe davon. Ich will bey Gelegenheit die Auflœsung versuchen; aber ich muss Zeit haben; denn es war mir so gar neu, daß bey einem Dreyecke die intersectio trium perpendiculorum ein eintziges Punct sey. Als ich diesem nachdachte, fand ich zugleich, daß die geraden Linien, welche von diesem Punct an die Ecken des Dreyecks gezogen werden kœnnen, sich wie die Cosinus dieser Ecken oder Winckel verhalten. Er Wohlgb. haben dieses ohnfehlbar auch bemercket.“

2 Interpretation

In einem Dreieck $A_0A_1A_2$ mit Höhenschnittpunkt H seien $x_i = \overline{HA_i}, i \in \{0,1,2\}$ die Höhenabschnitte (Fig. 1).

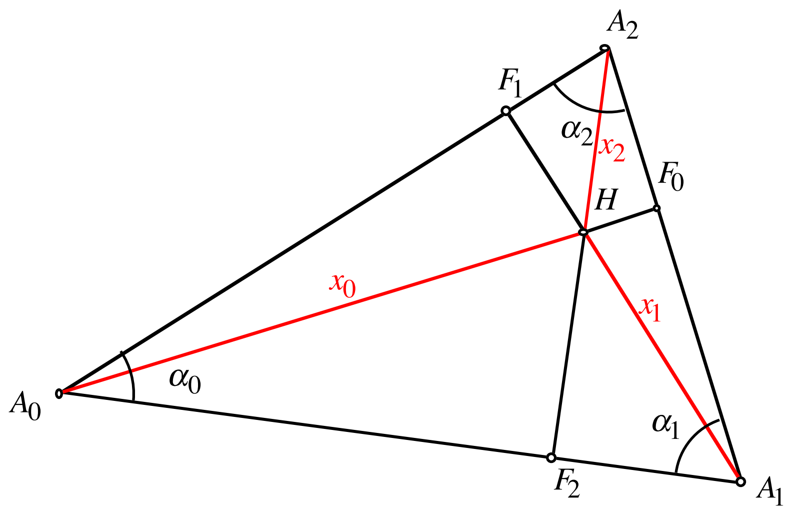

Fig. 1: Höhenabschnitte

Mit den Dreieckswinkeln $\alpha_i = \sphericalangle A_{i+1}A_iA_{i-1}$ $(i \bmod 3)$ gilt die Behauptung:

$$x_0 : x_1 : x_2 = \cos(\alpha_0) : \cos(\alpha_1) : \cos(\alpha_2)$$

3 Beweis

Das Viereck $A_0F_2HF_1$ hat bei F_1 und F_2 je einen rechten Winkel und bei A_0 den Winkel α_0. Daher hat es bei H den Winkel $\pi - \alpha_0$. Als Scheitelwinkel ist dann auch $\sphericalangle A_1HA_2 = \pi - \alpha_0$.

Wir spiegeln nun den Höhenschnittpunkt H an der Seite A_1A_2 (Fig. 2), der Bildpunkt sei H_0. Bei H_0 haben wir ebenfalls den Winkel $\pi - \alpha_0$.

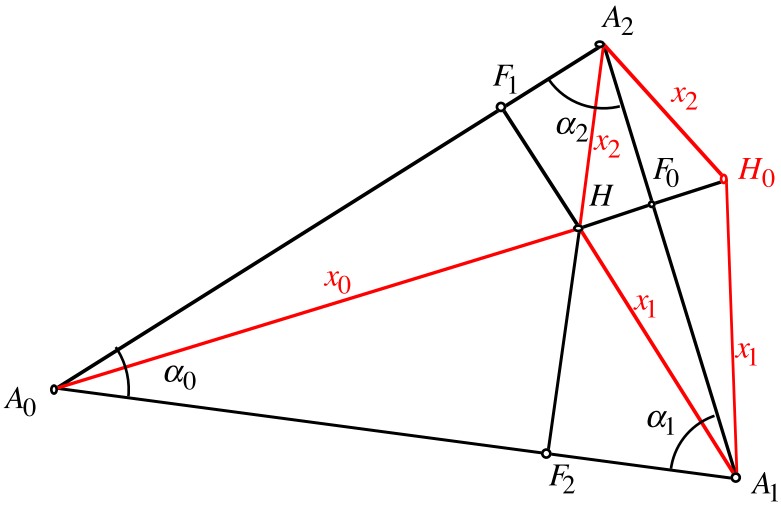

Fig. 2: Spiegeln des Höhenschnittpunktes

Das Viereck $A_0A_1H_0A_2$ ist daher ein Sehnenviereck. Sein Umkreis ist aber der Umkreis u des Dreieckes $A_0A_1A_2$ (Fig. 3).

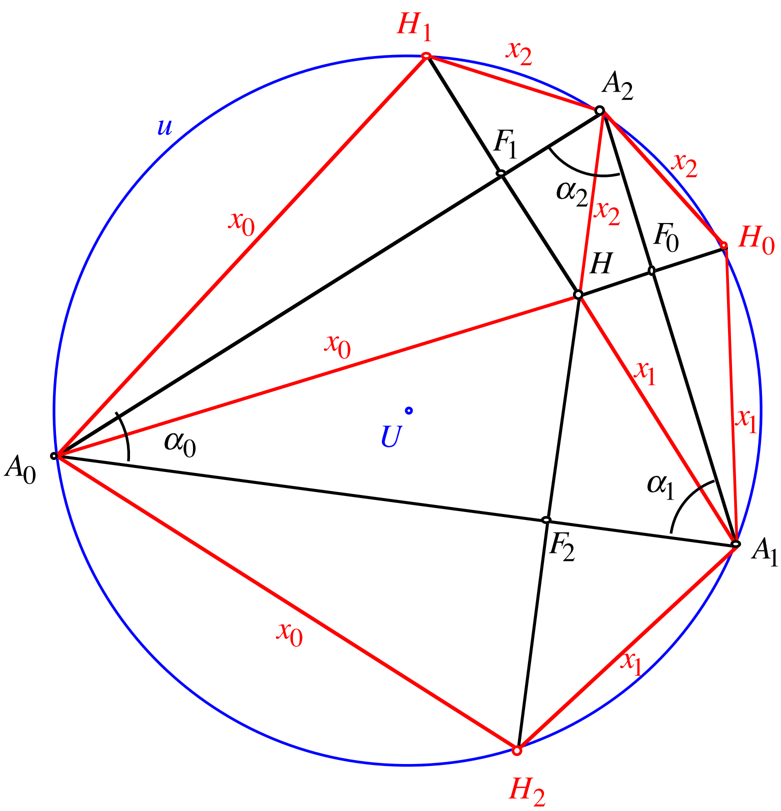

Fig. 3: Spiegelpunkte auf dem Umkreis

Wenn wir H an den beiden anderen Dreiecksseiten spiegeln, erhalten wir entsprechend die Punkte H_1 und H_2, welche ebenfalls auf dem Umkreis u des Dreieckes liegen .

Das Sehnensechseck $A_0H_2A_1H_0A_2H_1$ hat folgende Eigenschaften: Die mit der Ecke A_i inzidenten Seiten messen x_i. An der Ecke A_i misst der Innenwinkel $2\alpha_i$.

Wir teilen nun das Sechseck vom Umkreismittelpunkt U aus mit Radien in sechs gleichschenklige Dreiecke auf (Fig. 4).

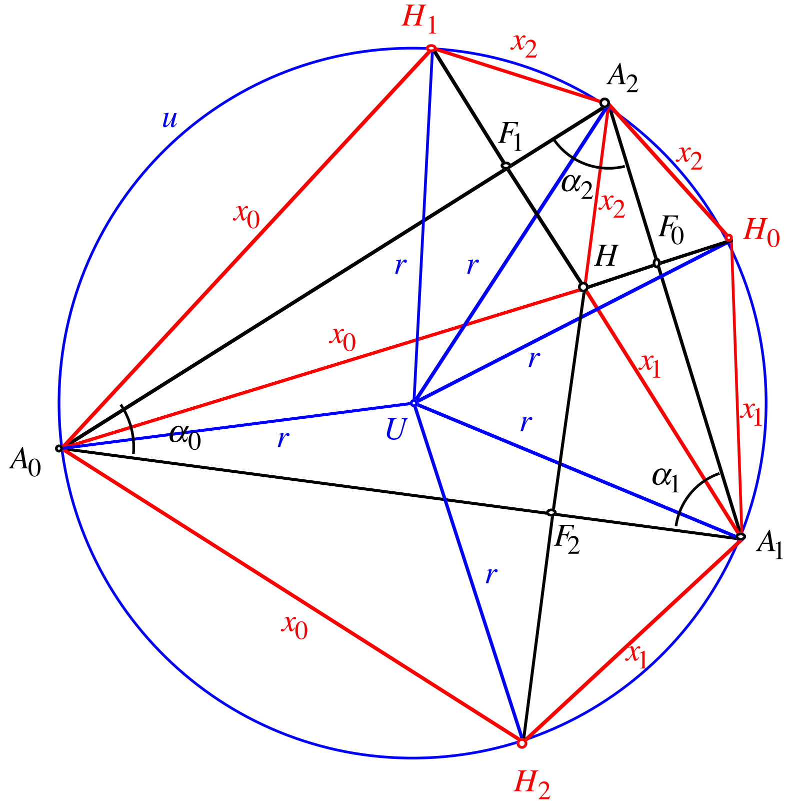

Fig. 4: Aufteilung in gleichschenklige Dreiecke

Dann sind zum Beispiel die beiden Dreiecke A_0H_2U und A_0H_1U kongruent. Sie haben die Schenkellänge r des Umkreisradius, die Basislänge x_0 und die Basiswinkel α_0. Daher ist $x_0 = 2r\cos(\alpha_0)$. Analog folgt $x_i = 2r\cos(\alpha_i)$ für $i \in \{0,1,2\}$.

Somit haben wir

$$\frac{x_0}{\cos(\alpha_0)} = \frac{x_1}{\cos(\alpha_1)} = \frac{x_2}{\cos(\alpha_2)} = 2r \,,$$

also die Behauptung von Segner.

Auffallend ist die formale Ähnlichkeit zum Sinussatz.