Hans Walser, [20060422a]

# Hochgradiger Pythagoras

## 1 Worum es geht

Zu zwei gegebenen Punkten $A$ und $B$ ist ein Dreieck $ABC$ gesucht so dass:

$$a^k + b^k = c^k$$

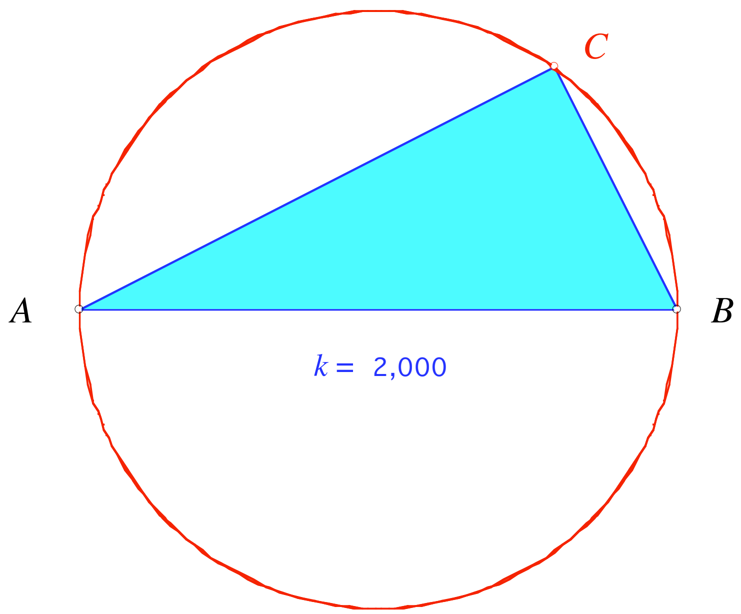
Wie sieht die Ortslinie von $C$ aus? Wie groß ist der Winkel $\gamma$ ?

## 2 Präliminarien

Für die folgenden Überlegungen ist $a,b,c \in \mathbb{R}$ mit $a,b,c > 0$ vorausgesetzt. Ferner sei $k \in \mathbb{R}$ und $k > 0$; $k$ braucht nicht ganzzahlig zu sein. Aus $a,b,c > 0$ und $a^k + b^k = c^k$ folgt $a,b < c$ und daher auch $\max(a,b) < c$ und $\min(a,b) < c$ .

## 3 Ein alter Bekannter

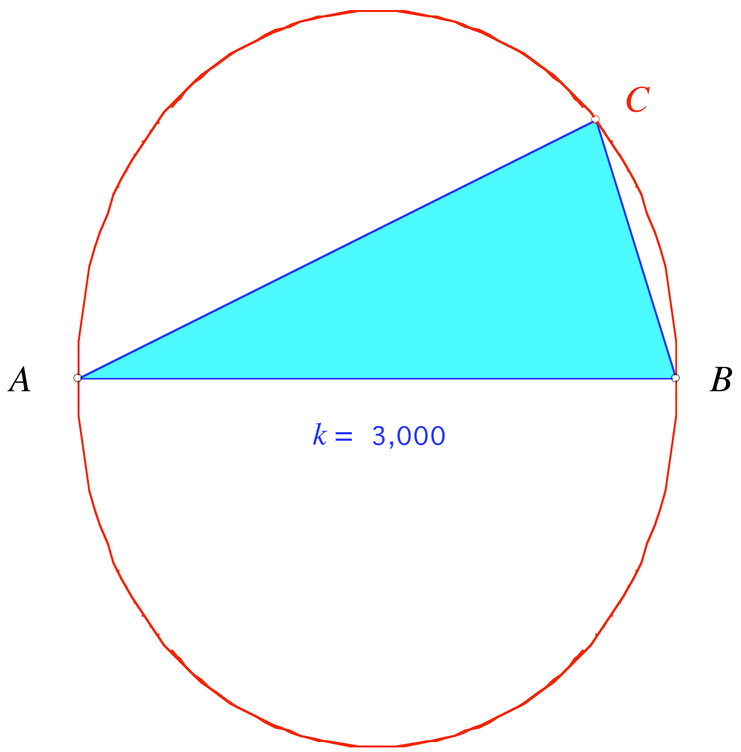
Für $k = 2$ haben wir die Formel von Pythagoras $a^2 + b^2 = c^2$ , das Dreieck ist rechtwinklig und die Ortslinie von $C$ ist der Thaleskreis über $AB$.




**Thaleskreis**

## 4 Variationen

Für $k = 3$ ergibt sich:

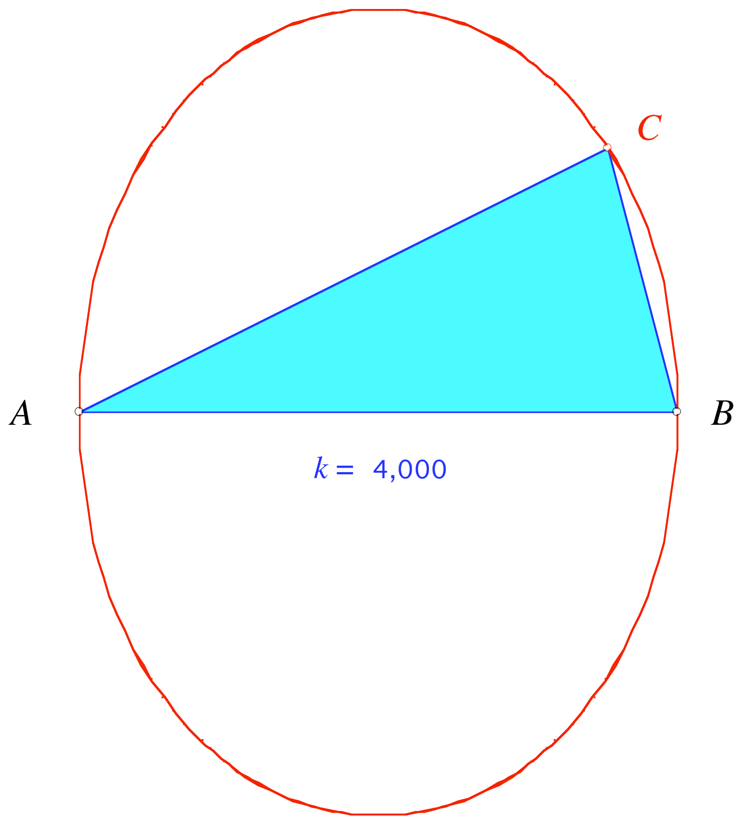



**$k = 3$**

Ist das eine Ellipse? Nach Cabri ist es eine Kurve fünften Grades, also keine Ellipse. Die Kurve verläuft offenbar außerhalb des Thaleskreises über der Strecke $AB$; der Winkel $\gamma$ ist ein spitzer Winkel.

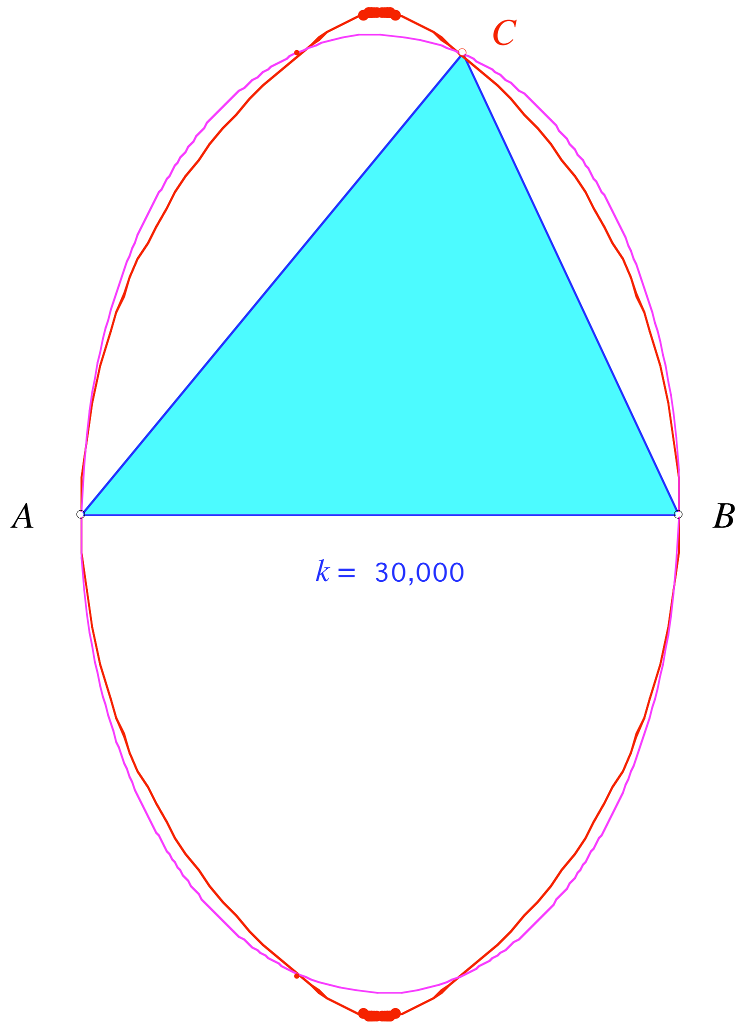
Bemerkung: Nach Fermat's last theorem gibt es kein Deieck mit ganzzahligen Seitenverhältnissen, das in diese Situation hineinpasst. Für $k = 3$ wurde dies bereits von Euler bewiesen.

Für $k = 4$ ergibt sich:



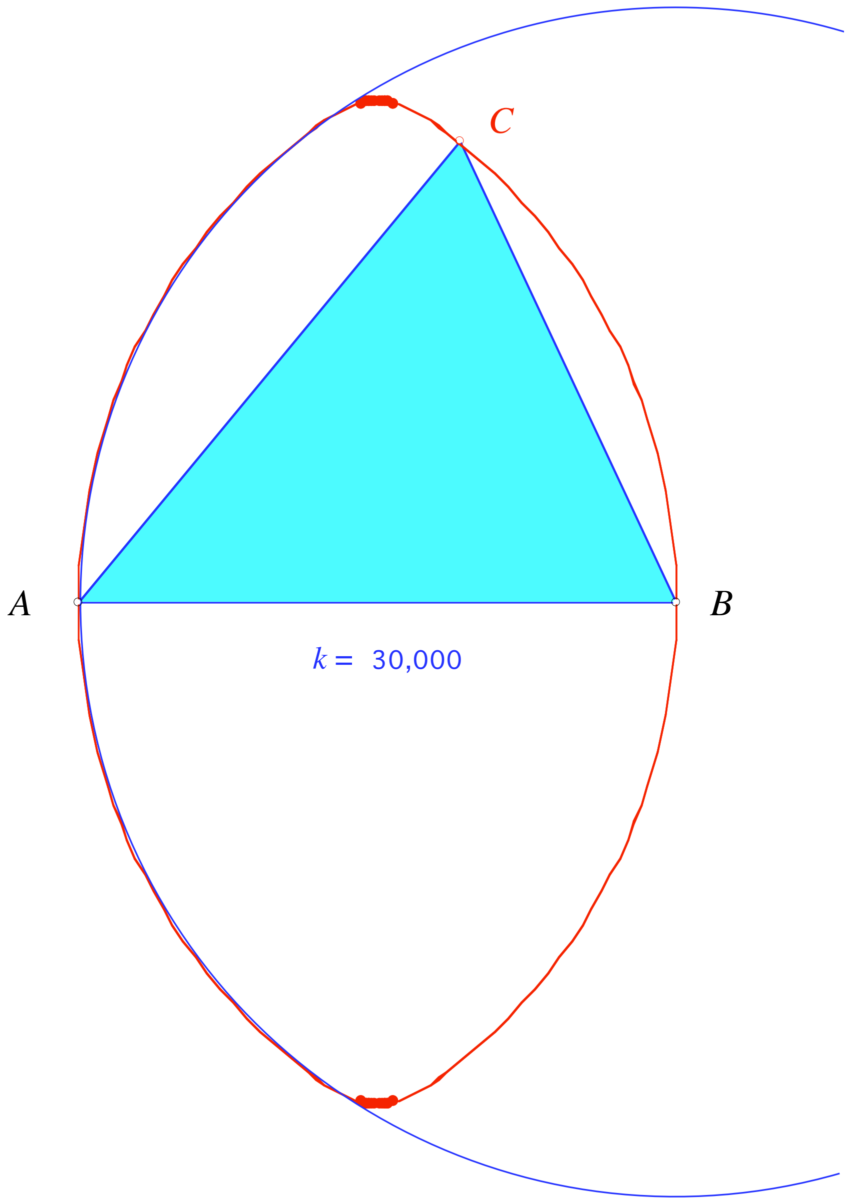

**$k = 4$**

Im folgenden Bild für $k = 30$ sehen wir deutlich den Unterschied zur Ellipse.




**$k$ = 30. Vergleichsellipse**

Wir vermuten, dass die linke Seite der Ortskurve durch einen Kreis um $B$ durch den Punkt $A$ approximiert werden kann.



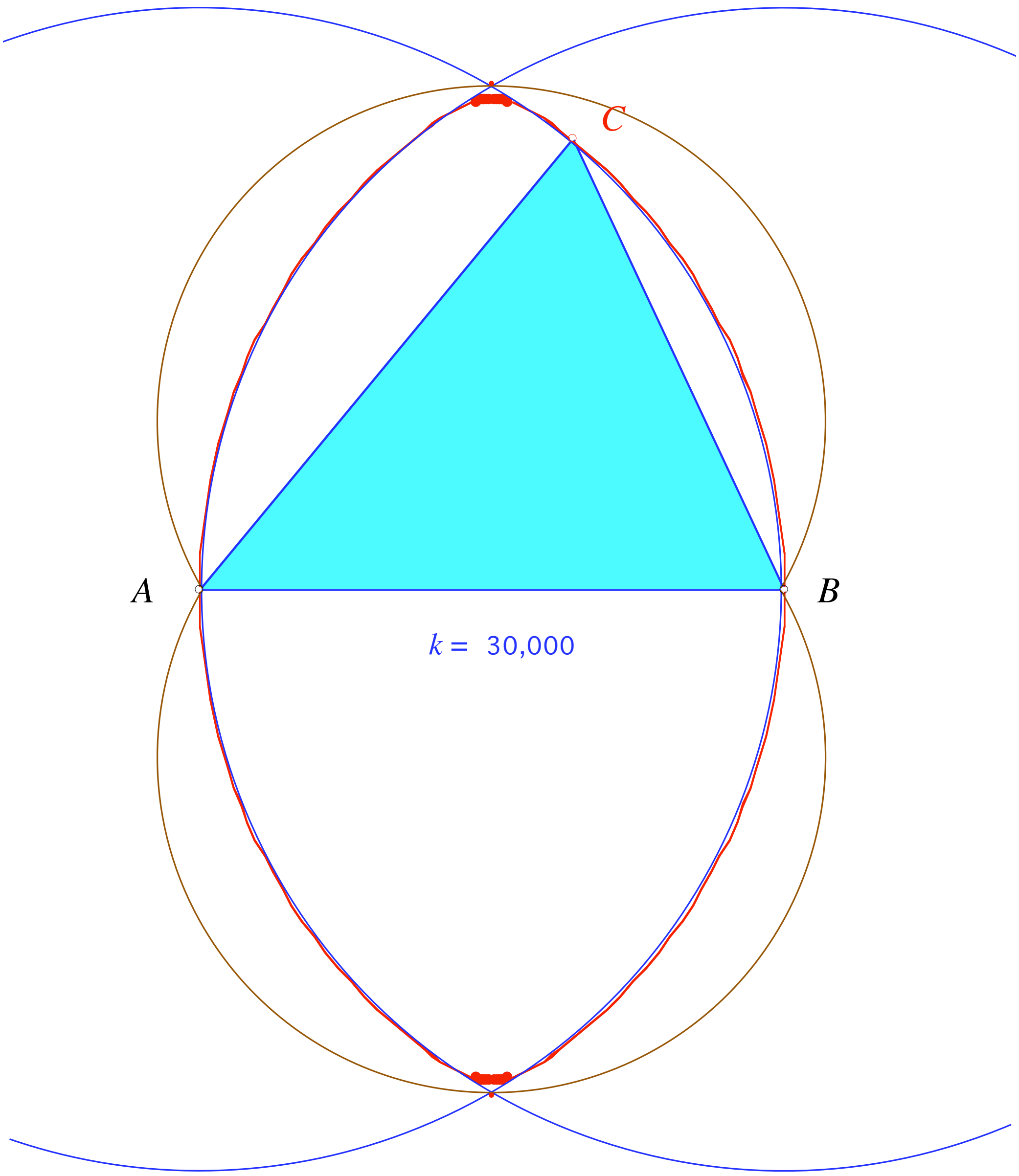

**Approximation durch Kreis**

Das lässt sich so erklären: Zunächst ist:

$$\frac{c^k}{a^k} = \frac{a^k + b^k}{a^k} = 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^k$$

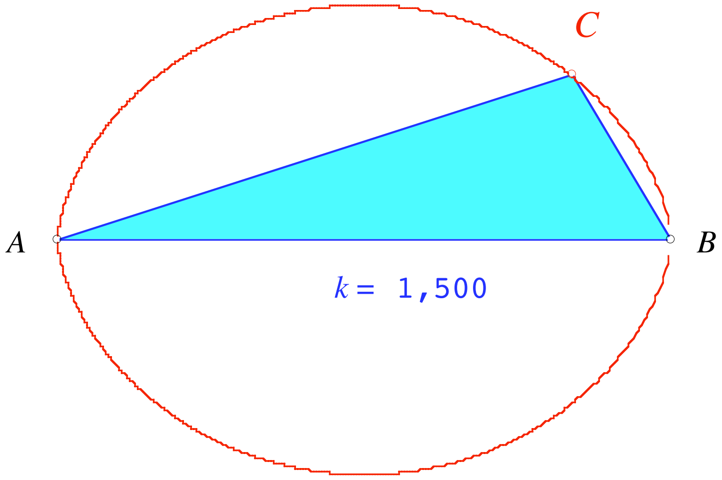
Für die linke Seite, also $b < a$, ist also $\lim\limits_{k \to \infty}\left(\frac{c^k}{a^k}\right) = 1$; für $k \to \infty$ gilt $a \to c$.

Die Ortskurve verläuft also innerhalb des Zweieckes, welches durch die beiden Kreise um $A$ und $B$ durch den jeweils anderen Punkt gebildet wird. Damit verläuft die Ortskurve aber auch innerhalb des Ortsbogenpaares über der Strecke $AB$ für den Peripheriewinkel 60°. Der Winkel $\gamma$ ist daher kleiner als 60°.




**Einschränkung**

Für $k = 1.5$ ergibt sich:




**$k$ = 1.5**

Hier verläuft die Ortskurve innerhalb des Thaleskreises, der Winkel $\gamma$ ist stumpf.

Für $k \to 1$ werden das Dreieck und damit die Ortskurve immer flacher. Für $k = 1$ liegt $C$ auf der Strecke $AB$.

## 5 Winkelabschätzungen

Wir machen folgende Fallunterscheidung bezüglich $k$:

(i) $k > 2$

(ii) $k = 2$

(iii) $1 < k < 2$

(iv) $k = 1$

(v) $0 < k < 1$

Im Falle (i), also $k > 2$, folgt aus $\max(a,b) < c$:

$$(\max(a,b))^{k-2} < c^{k-2}$$

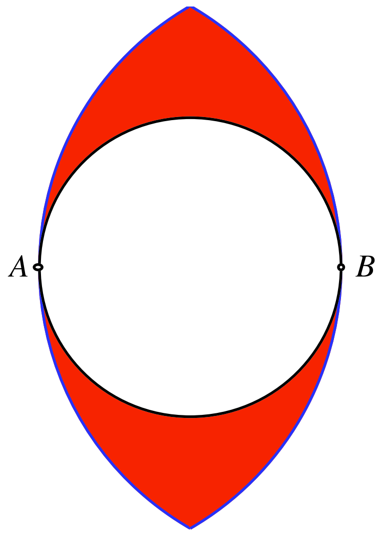
$$c^k = a^k + b^k < (\max(a,b))^{k-2}\left(a^2 + b^2\right) < c^{k-2}\left(a^2 + b^2\right)$$

$$c^2 < a^2 + b^2$$

Aus dem Kosinussatz folgt:

$$\cos(\gamma) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Wegen $c^2 < a^2 + b^2$ ist $\cos(\gamma) > 0$, der Winkel $\gamma$ also spitz. Wir haben oben schon gesehen, dass $\gamma < 60°$. Wegen $a, b < c$ liegen die Ecke $C$ und damit die Ortslinie im rot markierten Bereich der folgenden Figur.




**Bereich für *C***

Im Falle (ii), also $k=2$, haben wir ein rechtwinkliges Dreieck.

Im Falle (iii), also $1<k<2$, ist $-1<k-2<0$. Daher folgt aus $\min(a,b)<c$:

$$(\min(a,b))^{k-2}>c^{k-2}$$

$$c^k=a^k+b^k>(\min(a,b))^{k-2}\left(a^2+b^2\right)>c^{k-2}\left(a^2+b^2\right)$$

$$c^2>a^2+b^2$$

Wegen $c^2>a^2+b^2$ ist $\cos(\gamma)<0$, der Winkel $\gamma$ also stumpf.

Im Falle (iv), also $k=1$ ist $c=a+b$ und daher:

$$\cos(\gamma)=\tfrac{a^2+b^2-(a+b)^2}{2ab}=-1$$

Somit ist $\gamma=180°$.

Der Fall (v), also $0<k<1$, wird unten separat behandelt. Es zeigt sich, dass es in diesem Fall kein Dreieck geben kann.

**Zusammenfassung**

| $k$ | $\gamma$ |
|---|---|
| $k>2$ | $60°<\gamma<90°$ |
| $k=2$ | $\gamma=90°$ |
| $1<k<2$ | $90°<\gamma<180°$ |
| $k=1$ | $\gamma=180°$ |
| $0<k<1$ | keine Lösung |

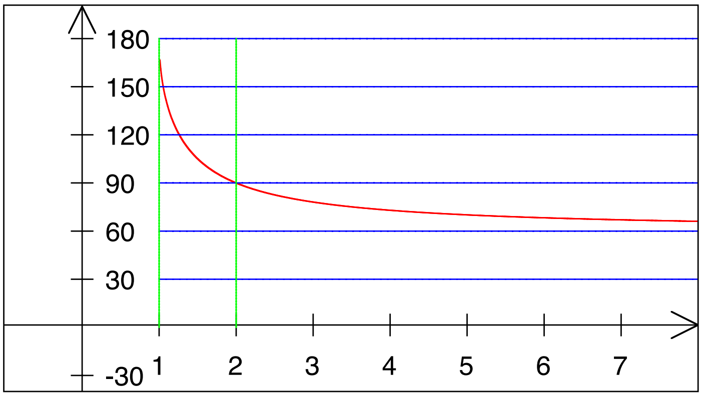
## 6 Gleichschenklige Dreiecke

Für $a=b$ folgt $a^k=\frac{1}{2}c^k$, also $a=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{k}}c$. Für den Winkel $\gamma$ haben wir somit:

$$\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)=\frac{\frac{c}{2}}{a}=\frac{\frac{c}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{k}}c}=\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{k}}=2^{\frac{1}{k}-1}$$

$$\gamma(k)=2\arcsin\left(2^{\frac{1}{k}-1}\right)$$

Diese Funktion $\gamma(k)$ ist nur für $k\geq 1$ definiert.




$$\gamma(k)=2\arcsin\left(2^{\frac{1}{k}-1}\right)$$

Es ist $\lim\limits_{k\to\infty}\left(\gamma(k)\right)=60°$.

## 7 Der unmögliche Fall

Für $0<k<1$ gibt es keine Lösung.

Wir zeigen das zunächst exemplarisch für $k=\frac{1}{2}$: Aus der Bedingung

$$a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}=c^{\frac{1}{2}}$$
$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{c}$$

folgt:

$$a+2\sqrt{ab}+b=c$$
$$a+b<c$$

Damit ist die Dreiecksbedingung $a+b>c$ verletzt.

Allgemein kann das so gezeigt werden: Wir setzen $\tilde{a}=\frac{a}{c}$ und $\tilde{b}=\frac{b}{c}$. Dann ist:

$$\tilde{a}^k+\tilde{b}^k=1,\ 0<\tilde{a}<1,\ 0<\tilde{b}<1$$

Es ist $\ln(\tilde{a})<0$ und wegen $0<k<1$ gilt:

$$\ln(\tilde{a})<k\ln(\tilde{a})$$
$$\ln(\tilde{a})<\ln\left(\tilde{a}^k\right)$$

Die Logarithmusfunktion ist monoton wachsend, daher ist $\tilde{a} < \tilde{a}^k$. Analog ist $\tilde{b} < \tilde{b}^k$. Daraus folgt:

$$\tilde{a} + \tilde{b} < \tilde{a}^k + \tilde{b}^k$$

Wegen $\tilde{a}^k + \tilde{b}^k = 1$ ist also:

$$\tilde{a} + \tilde{b} < 1$$

$$\tfrac{a}{c} + \tfrac{b}{c} < 1$$

$$a + b < c$$

Damit ist die Dreiecksbedingung verletzt.

Rein zahlentheoretisch gibt es für $k = \frac{1}{2}$ trivialerweise ganzzahlige Lösungen. So ist zum Beispiel:

$$\sqrt{4} + \sqrt{9} = \sqrt{25}$$

Das geht auch für höhere Wurzeln:

$$\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{125}$$

Mit gebrochenen Exponenten geht es, wenn 2 im Zähler steht.

$$27^{\frac{2}{3}} + 64^{\frac{2}{3}} = 125^{\frac{2}{3}}$$

Hinter diesem Beispiel steht das pythagoreische Zahlentripel $a = 3, b = 4, c = 5$.