Hans Walser, [20150606]

Hexenspirale

Anregung: (Kalman and Verdi, 2015)

1 Was ist eine Hexenspirale?

Eine Hexenspirale besteht aus zwei eckigen logarithmischen Spiralen, die sich wechselseitig ein- und umbeschrieben sind. Die Abbildung 1 zeigt ein Beispiel.

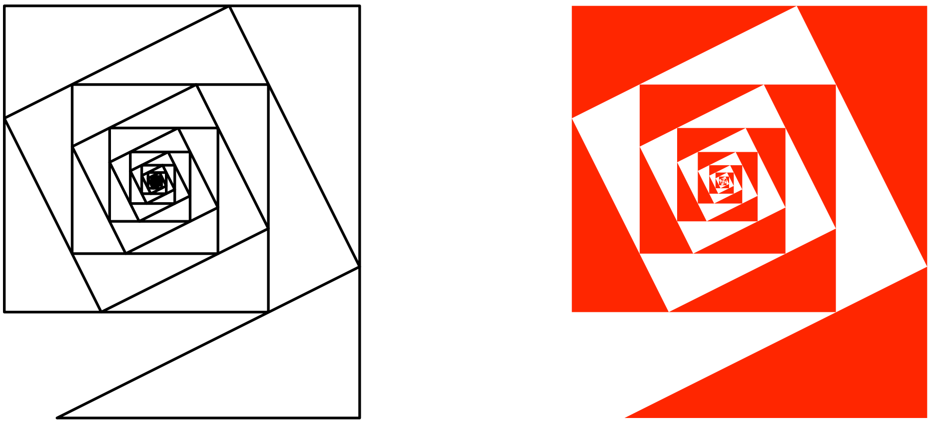

Abb. 1: Hexenspirale

2 Konstruktion

Es gibt zwei Möglichkeiten. Wir können entweder vom größten (roten) rechtwinkligen Dreieck ausgehen und den passenden Verkleinerungsfaktor für den Übergang zu nächsten Dreieck suchen oder wir können den Verkleinerungsfaktor vorgeben und das passende Startdreieck suchen.

Wir arbeiten mit den Bezeichnungen der Abbildung 2.

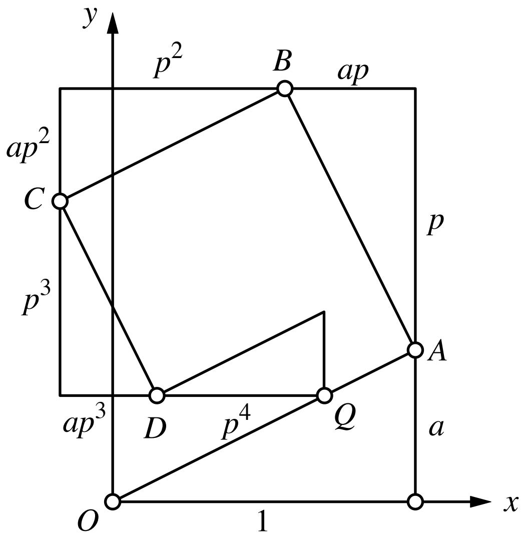

Abb. 2: Bezeichnungen

Das größte rechtwinklige Dreieck habe die Katheten 1 und a. Den Verkleinerungsfaktor bezeichnen wir mit p.

Im Koordinatensystem der Abbildung 2 gilt:

$$
\begin{aligned}
&O(0,0)\\
&A(1,a)\\
&B(1-ap,a+p)\\
&C\left(1-ap-p^2,a+p-ap^2\right)\\
&D\left(1-ap-p^2+ap^3,a+p-ap^2-p^3\right)\\
&Q\left(1-ap-p^2+ap^3+p^4,a+p-ap^2-p^3\right)
\end{aligned}
$$

Die Schließungsbedingung, also die Bedingung dass Q auf der Hypotenuse OA liegt, lautet:

$$a+p-ap^2-p^3=a\left(1-ap-p^2+ap^3+p^4\right)$$

$$p-p^3=-a^2p+a^2p^3+ap^4$$

2.1 Verkleinerungsfaktor gesucht

Aus der Schließungsbedingung erhalten wir bei gegebenem a für den Verkleinerungsfaktor p:

$$\left(1+a^2\right)p-\left(1+a^2\right)p^3-ap^4=0$$

Da die Lösung $p=0$ nicht interessant ist, bleibt für p die kubische Gleichung:

$$\left(1+a^2\right)-\left(1+a^2\right)p^2-ap^3=0$$

2.2 Startdreieck gesucht

Zu gegebenem Verkleinerungsfaktor p suchen wir das passende a. Aus der Schließungsbedingung erhalten wir die quadratische Gleichung für a:

$$\left(p^3-p\right)a^2+ap^4+\left(p^3-p\right)=0$$

Diese quadratische Gleichung für a hat positive reelle Lösungen nur für:

$$0.8392867552<p<1$$

3 Beispiele

3.1 Startdreieck gegeben

Für $a = 1$ (rechtwinklig gleichschenkliges Dreieck) erhalten wir mit CAS die reelle Lösung $p \approx 0.8392867553$. Die Abbildung 3 zeigt die Spirale.

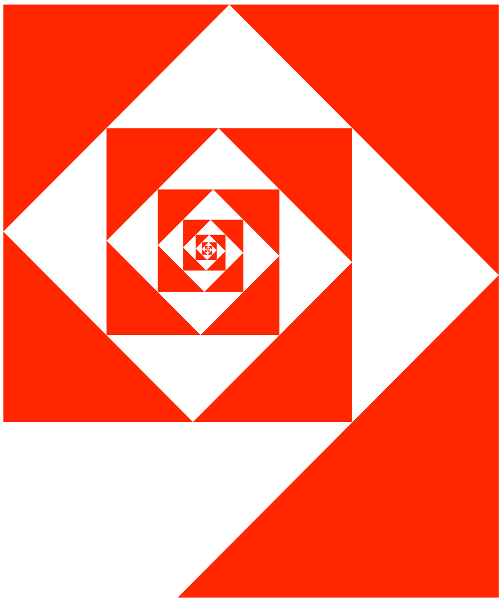

Abb. 3: Rechtwinklig gleichschenkliges Dreieck

Für $a = \sqrt{\frac{1}{2}}$ (DIN-Format, vgl. (Walser, 2015a) erhalten wir die reelle Lösung $p \approx 0.8455747970$ (Abb. 4).

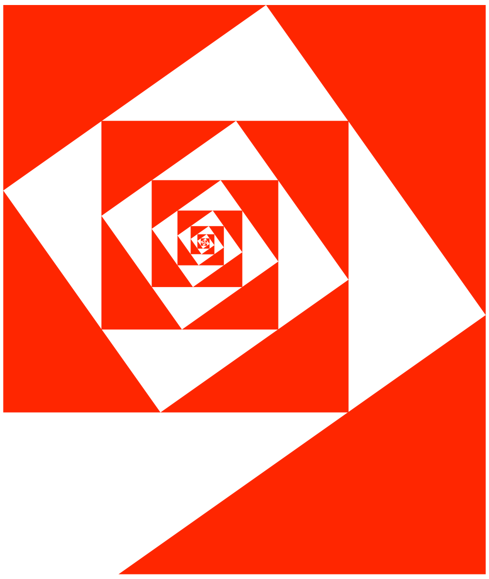

Abb. 4: DIN-Format

Für $a = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0.618$ (goldener Schnitt, vgl. (Walser, 2013b)) erhalten wir die reelle Lösung $p \approx 0.8510686207$ (Abb. 5).

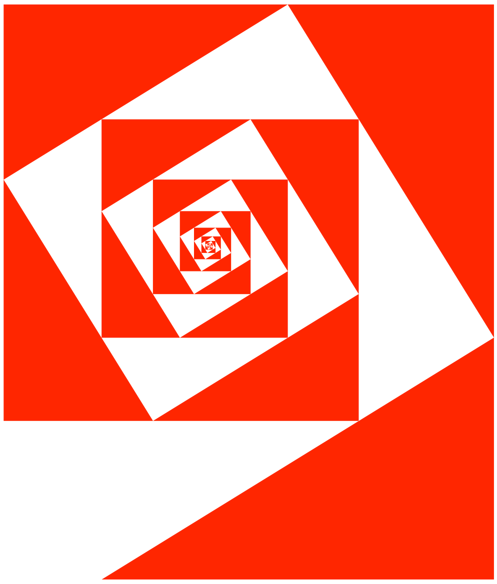

Abb. 5: Goldener Schnitt

3.2 Verkleinerungsfaktor gegeben

Für $p = 0.9$ ergeben sich für a die beiden reziproken Lösungen $a_1 \approx 3.5555952$ und $a_2 \approx 0.2812468606$. Die zugehörigen Startdreiecke haben dieselbe Form.

Die Abbildung 6 zeigt die Situation für die erste Lösung.

Abb. 6: Erste Lösung

Die Abbildung 7 zeigt die Situation für die zweite Lösung. Die beiden Lösungen sind spiegelbildlich.

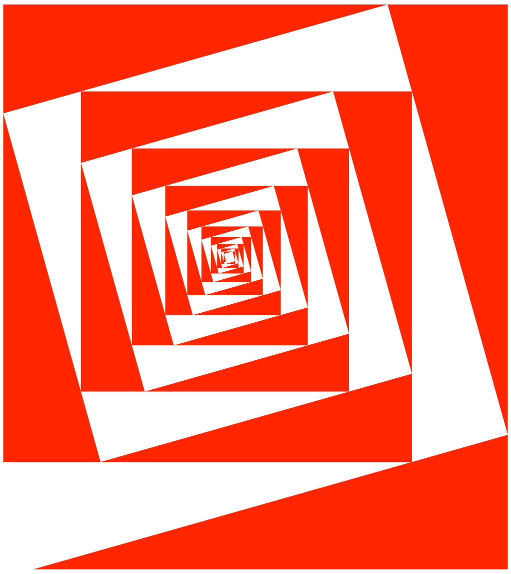

Abb. 7: Zweite Lösung

Literatur

Kalman, Dan and Verdi, Mark (2015): Polynomials with Closed Lill Paths. Mathematics Magazine, 88, 3-10.

Walser, Hans (2013a): DIN A4 in Raum und Zeit. Silbernes Rechteck – Goldenes Trapez – DIN-Quader. Edition am Gutenbergplatz, Leipzig 2013. ISBN 978-3-937219-69-1.

Walser, Hans (6. Auflage). (2013b). Der Goldene Schnitt. Mit einem Beitrag von Hans Wußing über populärwissenschaftliche Mathematikliteratur aus Leipzig. Leipzig: Edition am Gutenbergplatz. ISBN 978-3-937219-85-1.