Hans Walser, [20091020a]

Grenzwert

Die Folge:

$$a_1 = \tfrac{1}{2}$$
$$a_2 = \tfrac{1+2}{3+4}$$
$$a_3 = \tfrac{1+2+3}{4+5+6}$$
$$a_4 = \tfrac{1+2+3+4}{5+6+7+8}$$

Wie geht es weiter? Formulierung in Worten? Formulierung mit einer Formel? Was ist der Grenzwert?

Bearbeitung

$$\begin{aligned}
a_1 &= \tfrac{1}{2} = 0.5 \\
a_2 &= \tfrac{1+2}{3+4} = \tfrac{3}{7} = 0.\overline{428571} \\
a_3 &= \tfrac{1+2+3}{4+5+6} = \tfrac{6}{15} = \tfrac{2}{5} = 0.4 \\
a_4 &= \tfrac{1+2+3+4}{5+6+7+8} = \tfrac{10}{26} = \tfrac{5}{13} = 0.\overline{384615} \\
a_5 &= \tfrac{1+2+3+4+5}{6+7+8+9+10} = \tfrac{15}{40} = \tfrac{3}{8} = 0.375 \\
a_6 &= \tfrac{1+2+3+4+5+6}{7+8+9+10+11+12} = \tfrac{21}{57} = \tfrac{7}{19} \approx 0.36842105263
\end{aligned}$$

Zur Berechnung von a_n dividieren wir die Summe der ersten n natürlichen Zahlen durch die Summe der zweiten n natürlichen Zahlen.

$$a_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} k}{\sum_{k=n+1}^{2n} k}$$

Zähler und Nenner sind je eine Partialsumme einer arithmetischen Folge (der einfachsten, die es gibt). Eine Partialsumme einer arithmetischen Folge berechnen wir, indem wir das arithmetische Mittel des ersten und des letzten Summanden mit der Anzahl der Summanden multiplizieren. In unserem Fall heißt das;

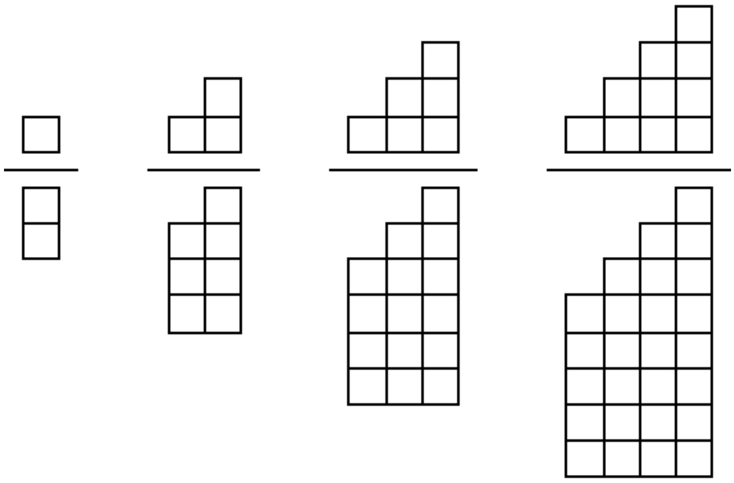
$$a_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} k}{\sum_{k=n+1}^{2n} k} = \frac{\tfrac{1}{2}(1+n)n}{\tfrac{1}{2}(n+1+2n)n} = \frac{1+n}{1+3n}$$

Somit erhalten wir für den Grenzwert:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1+n}{1+3n} = \frac{1}{3}$$

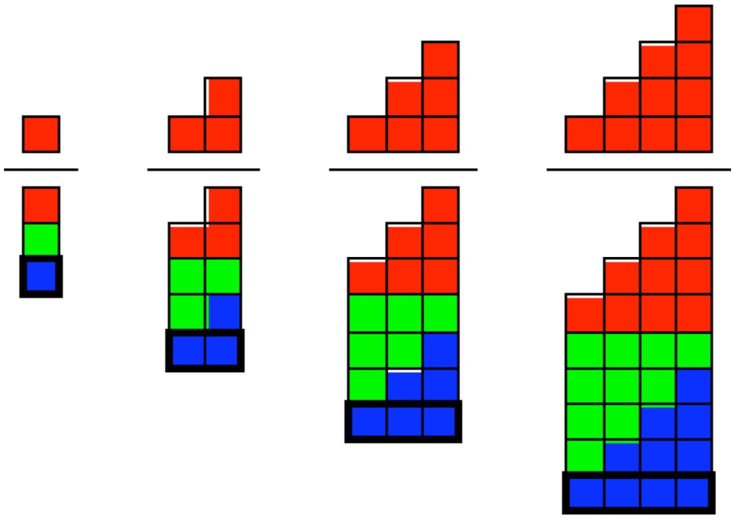
Visualisierung

Wir stellen Zähler und Nenner grafisch je durch ein Staffelbild dar:



Staffelbilder

Die Zähler haben fast drei Mal Platz in den Nennern; wir müssen jeweils unten noch eine Konsole hinzufügen.



Der Zähler hat fast drei Mal Platz im Nenner

Da die angefügte Konsole relativ zum Gesamtnenner immer kleiner wird, ergibt sich der Grenzwert $\frac{1}{3}$.