Hans Walser, [20130503]

Goldenes Rechteck verallgemeinert

1 Worum es geht

Es werden die Diagonalen-Schnittwinkel im verallgemeinerten Goldenen Rechteck untersucht.

2 Das Goldene Rechteck

Im Goldenen Rechteck bleibt nach Abschneiden eines Quadrates ein Restrechteck übrig, das zum Ausgangsrechteck ähnlich ist.

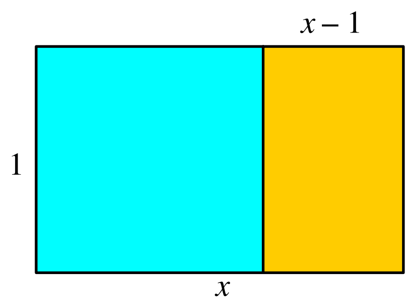

Abb. 1: Goldenes Rechteck

Mit den Bezeichnungen der Abbildung 1 ergibt sich:

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}$$

Somit: $x^2 - x - 1 = 0$, also $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$.

3 Verallgemeinerung

Statt einem Quadrat schneiden wir n Quadrate in einer Reihe ab. Die Abbildung 2 illustriert die Situation für den Fall $n = 3$.

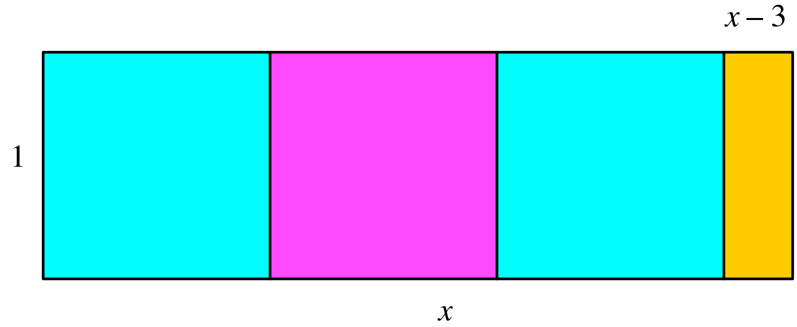

Abb. 2: Drei Quadrate abschneiden

Wir erhalten:

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-n}$$

Daraus ergibt sich $x^2 - nx - 1 = 0$ und:

$$x = \frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}$$

4 Sonderfälle

Für $n = 0$ ergibt sich das Quadrat, für $n = 1$ das Goldene Rechteck, für $n = 2$ das so genannte *Silberne Rechteck* (Abb. 3).

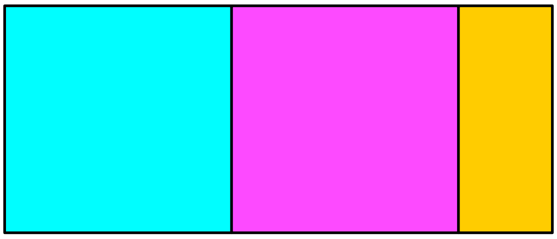

Abb. 3: Silbernes Rechteck

Das Rechteck für $n = 3$ (Abb. 2) wird gelegentlich als *bronzenes Rechteck* bezeichnet.

5 Diagonalen-Schnittwinkel

5.1 Beispiele

Das Quadrat ($n = 0$) hat den Diagonalen-Schnittwinkel 90° (Abb. 4).

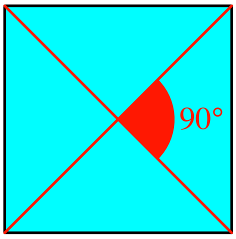

Abb. 4: Orthogonale Diagonalen

Das Goldene Rechteck ($n = 1$) hat den Diagonalen-Schnittwinkel 63.434948822922°, eine nicht sehr ansprechende Zahl (Abb. 5).

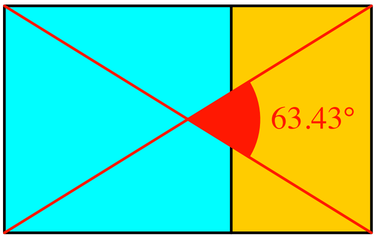

Abb. 5: Unschöner Schnittwinkel

Für das Silberne Rechteck ($n = 2$) erhalten wir den „schönen“ Diagonalen-Schnittwinkel 45° (Abb. 6).

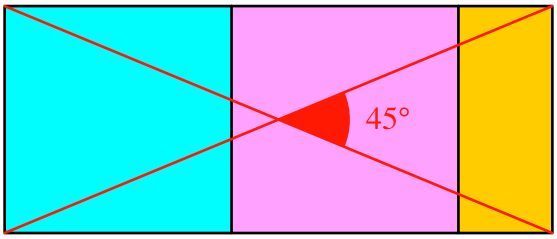

Abb. 6: Schnittwinkel 45°

Für das bronzene Rechteck ($n = 3$) ergibt sich 33.6900675259793° (Abb. 7).

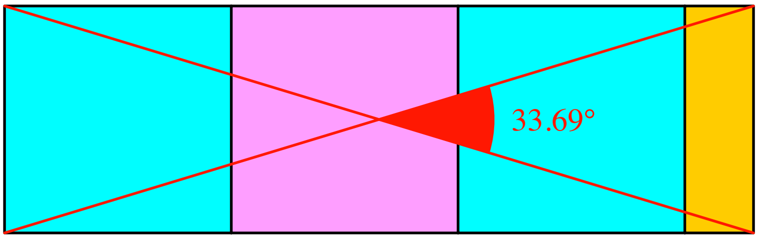

Abb. 7: Kein schöner Schnittwinkel

Lassen sich diese Schnittwinkel einheitlich darstellen?

5.2 Allgemein

Den Schnittwinkel bezeichnen wir mit α . Da die Rechtecke die Länge $x = \frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}$ und die Höhe 1 haben, ergibt sich:

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{2}{n+\sqrt{n^2+4}}$$

Wegen

$$\tan(\alpha) = \frac{2\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

erhalten wir mit einiger Rechnung:

$$\tan(\alpha) = \frac{2\frac{2}{n+\sqrt{n^2+4}}}{1-\left(\frac{2}{n+\sqrt{n^2+4}}\right)^2} = \frac{2}{n}$$

Es ist also:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{2}{n}\right)$$

Um eine Division durch Null (bei $n = 0$) zu vermeiden, schreiben wir die Formel noch etwas um:

$$\alpha = \operatorname{arccot}\left(\frac{n}{2}\right)$$

5.3 Tabelle

Die Tabelle gibt die Werte des Diagonalen-Schnittwinkels α für n von 0 bis 20.

n	α
0	90°
1	63.434949°
2	45°
3	33.690068°
4	26.565051°
5	21.801409°
6	18.434949°
7	15.945396°
8	14.036243°
9	12.528808°
10	11.309932°
11	10.304846°
12	9.4623222°
13	8.7461623°
14	8.1301024°
15	7.5946434°
16	7.1250163°
17	6.7098368°
18	6.3401917°
19	6.009006°
20	5.7105931°