Hans Walser, [20180502]

Goldene Treppe

Idee und Anregung: Hartmut Rehlich, Braunschweig

1 Worum geht es?

Die Goldene Treppe ist ein nicht konvexes Sechseck, das sich in zwei zum Startsechseck ähnliche, aber nicht kongruente Teilsechsecke zerlegen lässt.

Der Goldene Schnitt spielt dabei eine wesentliche Rolle.

2 Die Goldene Treppe

Die Abbildung 1a zeigt die von Hartmut Rehlich entdeckte Figur der *Goldenen Treppe*.

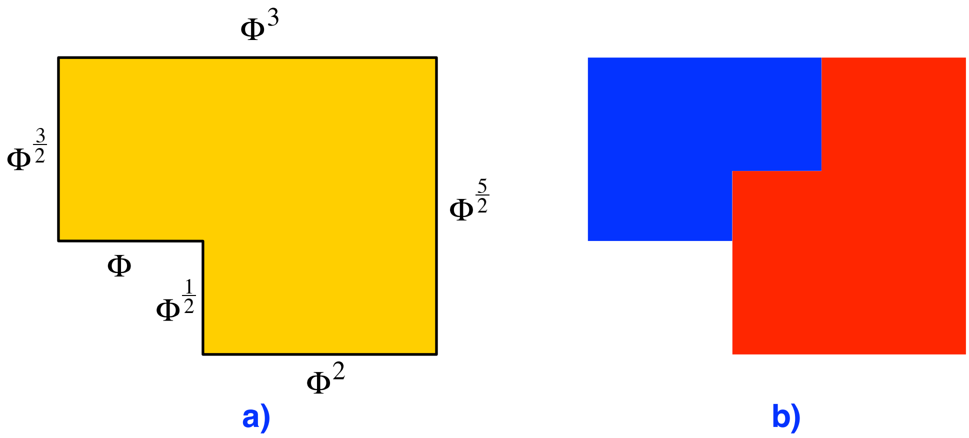

Abb. 1: Goldene Treppe

Die Verhältnisse der Seitenlängen lassen sich durch Potenzen von $\sqrt{\Phi}$ angeben. Dabei ist Φ der Goldene Schnitt (Walser 2013):

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618 \tag{1}$$

Die Seitenlängen bilden eine geometrische Folge mit dem Quotienten $\sqrt{\Phi}$. Dabei sind die in der Abbildung 1a horizontalen Seiten ganzzahlige Potenzen von Φ, die vertikalen Seiten echt halbzahlige Potenzen von Φ.

Die Abbildung 1b zeigt die Zerlegung in zwei kleinere Goldene Treppen. Das Flächenverhältnis der beiden Teilfiguren ist $\Phi:1$. Es ist daher in Anlehnung an die übliche Terminologie beim Goldenen Schnitt sinnvoll, die größere Teilfigur als *Major* und die kleinere als *Minor* zu bezeichnen.

Das größere Teilfigur (Major) ist gleichsinnig ähnlich zur Ausgangsfigur der Abbildung 1a, das kleinere Teilfigur (Minor) ist ungleichsinnig ähnlich.

3 Iterationen der Zerlegung

Da die Teilfiguren wiederum Goldene Treppen sind, können sie ebenfalls je in zwei Goldene Treppen zerlegt werden.

3.1 Zerlegung aller Teilfiguren

Die Abbildung 2 zeigt schrittweise die Zerlegungen.

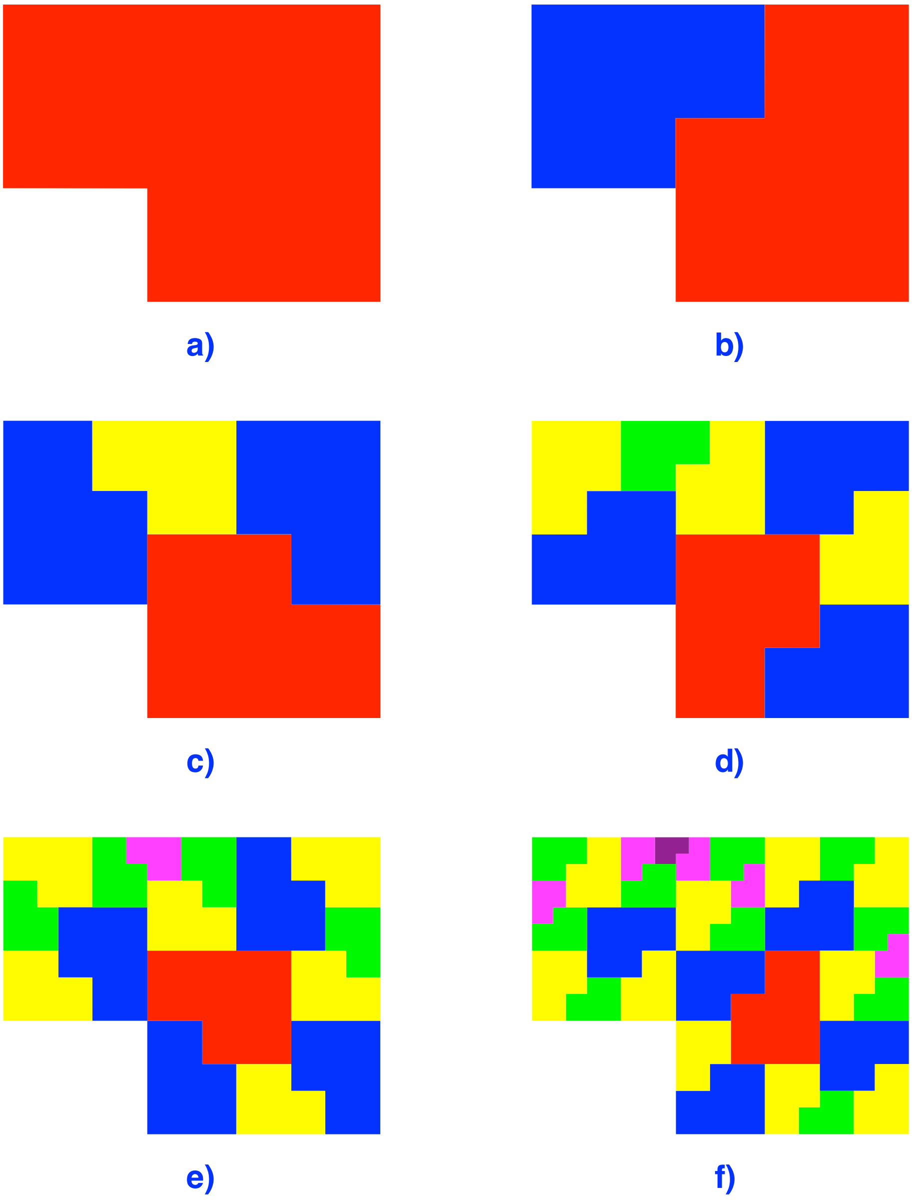

Abb. 2: Zerlegungen

Bei der Abbildung 2c kommen zwei gleich große Teilfiguren vor (blau). Sie sind aber unterschiedlich entstanden. Das eine ist der Minor des Majors der ersten Zerlegung (Abb. 2b), das andere der Major des Minors der ersten Zerlegung.

In der Abbildung 2d haben wir zweimal drei gleich große Teilfiguren (blau und gelb).

Die Tabelle 1 gibt einen Überblick über die Häufigkeiten gleich großer Teilfiguren. Wir erhalten die Binomialkoeffizienten.

a)	1					
b)	1	1				
c)	1	2	1			
d)	1	3	3	1		
e)	1	4	6	4	1	
f)	1	5	10	10	5	1

Tab. 1: Häufigkeiten

Walser (2017) sowie [2] gibt ein analoges Beispiel zur Visualisierung der Binomialkoeffizienten bei rechtwinkligen Dreiecken.

3.2 Zerlegung des Minors

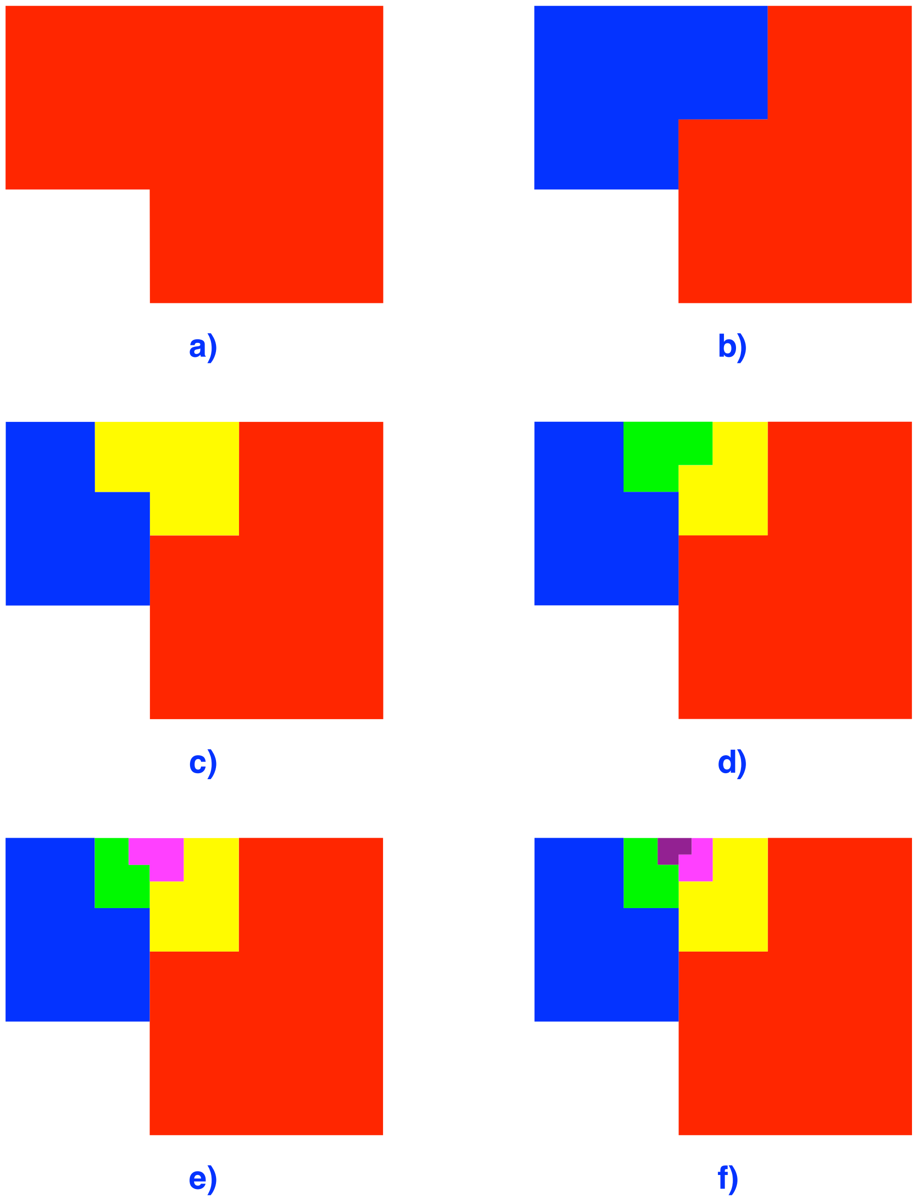

Abb. 3: Zerlegung des Minors

In der Abbildung 3 wird jeweils immer nur der Minor zerlegt. Wir erhalten einen Grenzpunkt, der die Oberkante im Verhältnis des Goldenen Schnittes teilt.

3.3 Zerlegung des Majors

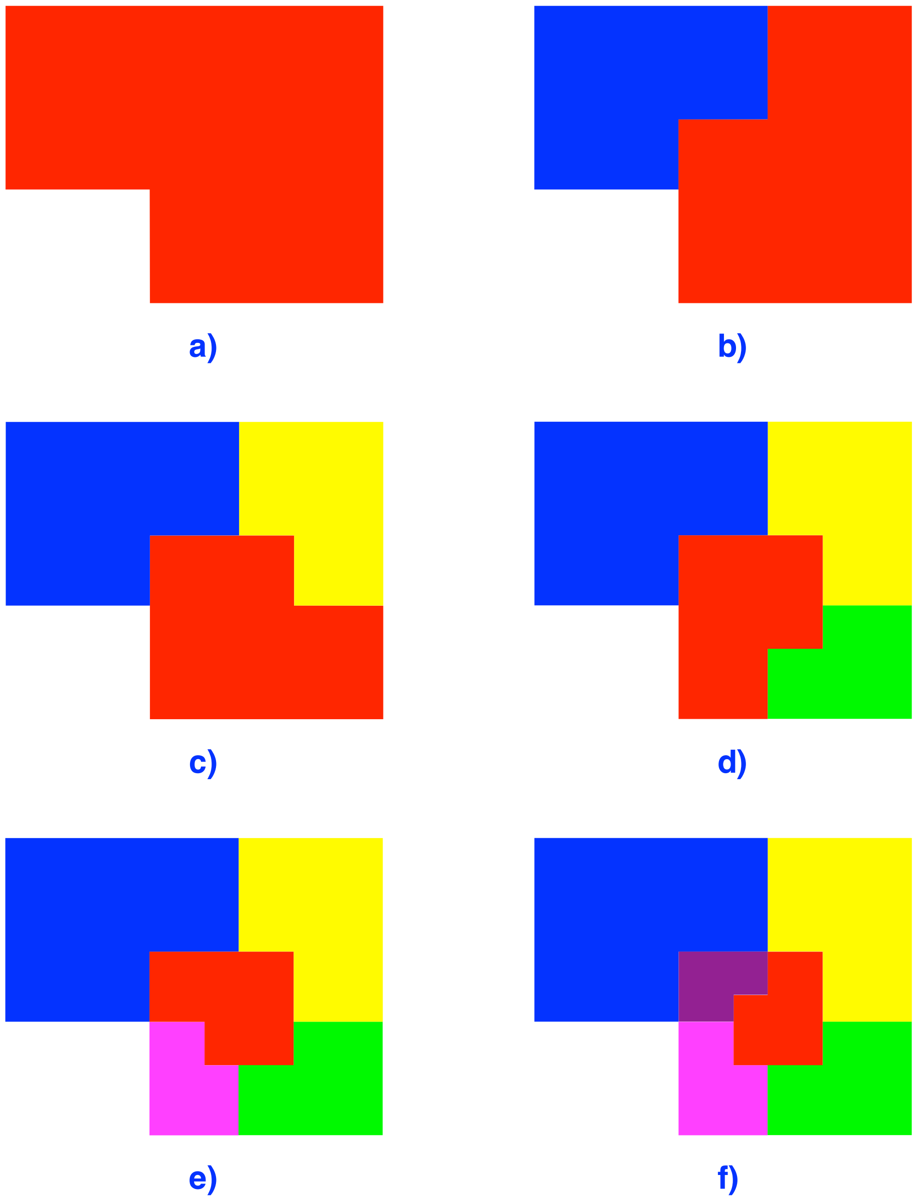

Abb. 4: Zerlegung des Majors

Es entsteht eine Spirale. Die Abbildung 5 zeigt die Spirale in einer anderen Färbung.

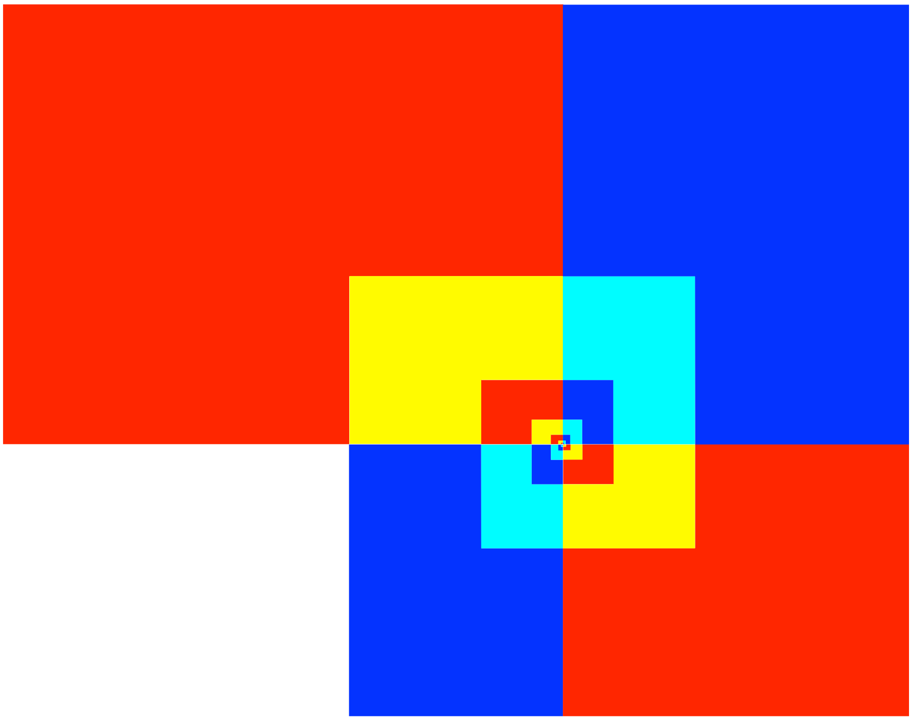

Abb. 5: Spirale

4 Schiefe Treppe

Die Goldene Treppe hat ausschließlich rechte Winkel.

Wenn wir bei gleichen Seitenverhältnissen mit schiefen Winkeln arbeiten, können wir nicht in zwei, sondern nur in vier ähnliche Teilfiguren zerlegen (Abb. 6).

Abb. 6: Schiefe Situation

Zwei dieser Teilfiguren sind kongruent.

Literatur

Walser, Hans (2013): *Der Goldene Schnitt*. 6., bearbeitete und erweiterte Auflage. Mit einem Beitrag von Hans Wußing über populärwissenschaftliche Mathematikliteratur aus Leipzig. Leipzig: EAGLE, Edition am Gutenbergplatz. ISBN 978-3-937219-85-1.

Walser, Hans (2017): Rechtwinklige Dreiecke ... . Ideenkiste. ml, mathematik lehren 204 | 2017, 51.

Websites

[1] Hans Walser: Zerlegung in ähnliche Teilfiguren (2.5.2018):
www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/Z/Zerlegung/Zerlegung.htm
[2] Hans Walser: Dreiecksunterteilung (2.5.2018):
www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/D/Dreiecksunterteilung2/Dreiecksunterteilung2.htm