Hans Walser, [20130528]

Goldene Rechtecke

1 Ausgangslage

Das Einheitsquadrat und das Rechteck mit den Seitenlängen Φ und $\frac{1}{\Phi}$ sind flächengleich.

Unter Φ verstehen wir den Goldenen Schnitt (Walser 2013):

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.6180$$

Die Abbildung 1 zeigt die Situation.

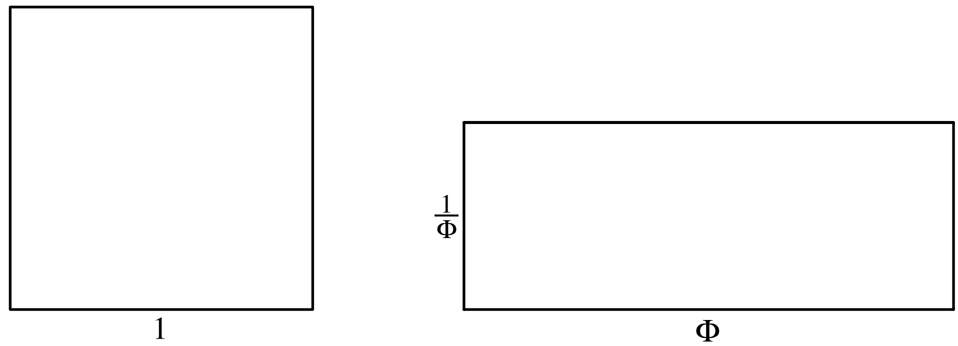

Abb. 1: Quadrat und Rechteck

Das Rechteck hat das Seitenverhältnis $\frac{1}{\Phi} : \Phi = 1 : \Phi^2$. Es ist zu unterscheiden vom so genannten Goldenen Rechteck mit dem Seitenverhältnis $1 : \Phi$. Ich schlage für unser längeres Rechteck den Namen *langes Goldenes Rechteck* vor.

2 Zerlegungsgleichheit

Das Quadrat und das lange Goldene Rechteck der Abbildung 1 sind flächengleich und somit zerlegungsgleich. Die Abbildung 2 zeigt eine gemeinsame Zerlegung.

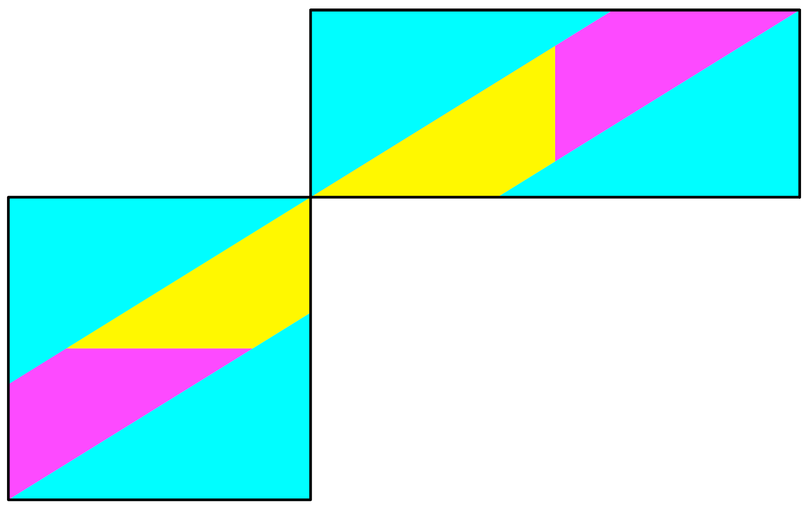

Abb. 2: Zerlegungsgleichheit

Wir kommen mit zwei Puzzle-Formen durch. Die entsprechenden Puzzle-Teile können durch Verschieben zur Deckung gebracht werden.

3 Seitenparallele Rechtecke

Die Frage ist, ob es auch eine gemeinsame Zerlegung in seitenparallele Rechtecke gibt. Die Abbildung 3 zeigt den ersten Schritt dieser gemeinsamen Zerlegung.

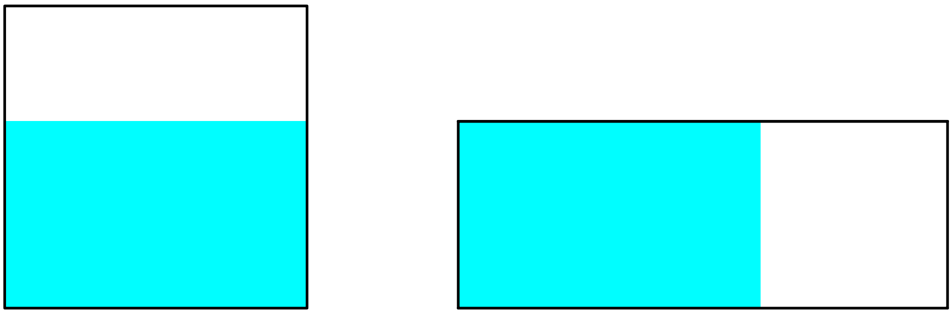

Abb. 3: Erster Schritt

Das größtmögliche gemeinsame Puzzle-Teil ist nun ein Goldenes Rechteck. Als Restrechtecke haben wir nun aber links ein langes Goldenes Rechteck und rechts ein Quadrat. Damit ist klar, dass das Zerlegungsverfahren nicht terminiert. Hier äußert sich die Irrationalität des Goldenen Schnittes. Die Abbildung 4 zeigt den nächsten Schritt.

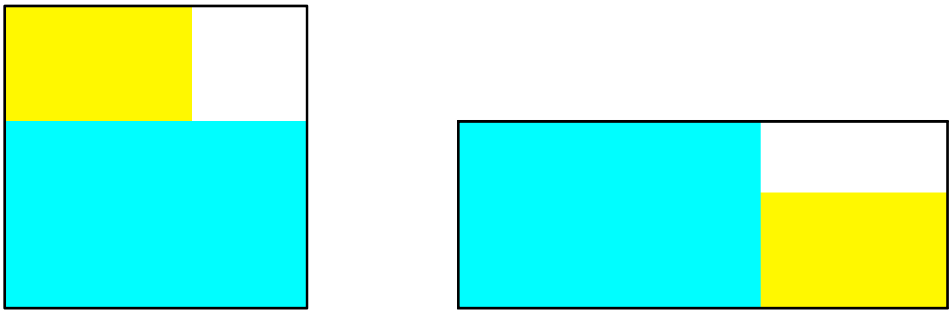

Abb. 4: Zweiter Schritt

Das Puzzle-Rechteck ist wiederum ein Goldenes Rechteck. Das Restrechteck links ist nun ein Quadrat und das Restrechteck rechts ein langes Goldenes Rechteck. Die Abbildung 5 zeigt die folgenden Schritte, theoretisch geht es ad infinitum.

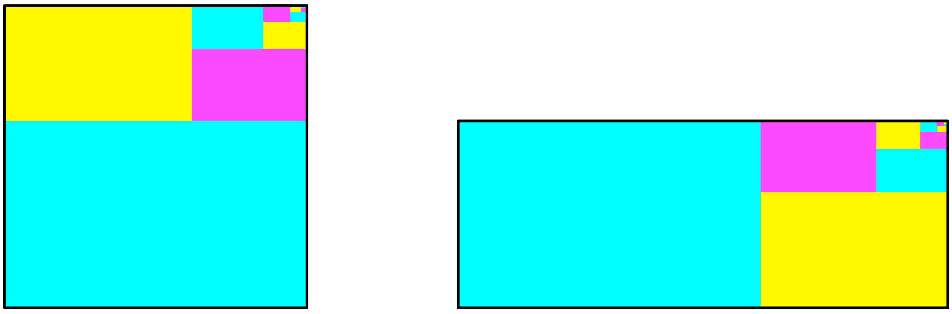

Abb. 5: Infinitesimale Ausschöpfung

Bei der Anordnung der Puzzle-Teile gemäß Abbildung 5 kommen wir mit drei Farben aus. Wir können natürlich auch anders anordnen. Die Abbildung 6 zeigt eine spiralförmige Anordnung. Wir benötigen vier Farben.

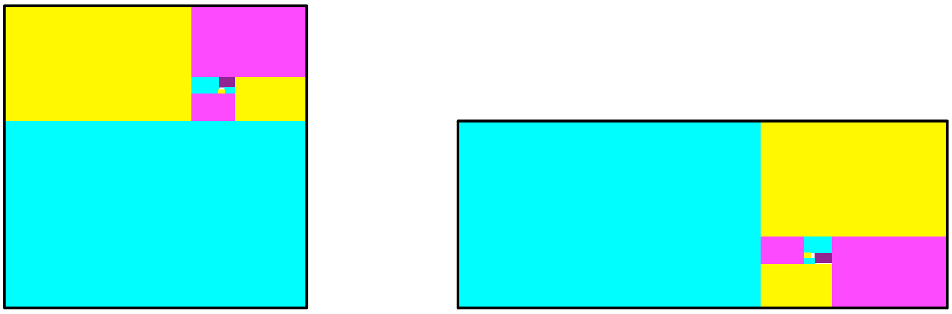

Abb. 6: Spiralförmige Anordnung

3.1 Etwas Rechnung

Die Goldenen Rechtecke haben die Flächeninhalte:

$$\tfrac{1}{\Phi},\left(\tfrac{1}{\Phi}\right)^3,\left(\tfrac{1}{\Phi}\right)^5,\left(\tfrac{1}{\Phi}\right)^7,\left(\tfrac{1}{\Phi}\right)^9,\ldots$$

Da sie zusammen das Einheitsquadrat ausschöpfen, erhalten wir die Beziehung:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\tfrac{1}{\Phi}\right)^{2n-1}=1$$

3.2 Entzerrung

Wenn wir das Quadrat der Abbildung 6 in der senkrechten Richtung mit dem Faktor Φ strecken, erhalten wir ein Goldenes Rechteck im Hochformat, welches von Quadraten ausgeschöpft wird (Abb. 7).

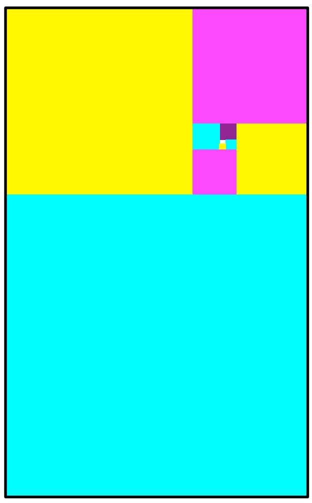

Abb. 7: Goldenes Rechteck

Wenn wir umgekehrt das lange Goldene Rechteck der Abbildung 6 in horizontaler Richtung mit dem Faktor $\tfrac{1}{\Phi}$ strecken (also inhaltlich schrumpfen), erhalten wir ein Goldenes Rechteck im Querformat, das durch Quadrate ausgeschöpft wird (Abb. 8).

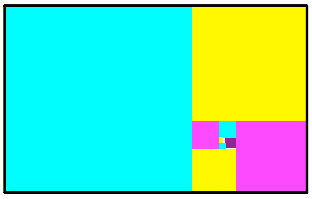

Abb. 8: Die sattsam bekannte Figur

Literatur

Walser, Hans (6. Auflage). (2013). *Der Goldene Schnitt*. Mit einem Beitrag von Hans Wußing über populärwissenschaftliche Mathematikliteratur aus Leipzig. Leipzig: Edition am Gutenbergplatz. ISBN 978-3-937219-85-1.