Hans Walser, [20130620]

Gleichschenklige Trisektrix-Dreiecke

Ausarbeitung einer Idee von H. M.-S., V.

1 Trisektrix von MacLaurin

Die beiden Dreieckspunkte A und B seien fest vorgegeben. Der dritte Dreieckspunkt C soll so gewählt werden, dass die entstehenden Dreiecke ABC die Gleichung

$$a^2 \pm ab = c^2$$

erfüllen.

Die Trisektrix ist die Ortskurve des Punktes C.

Die Abbildung 1 zeigt die Trisektrix mit einem allgemeinen Trisektrix-Dreieck.

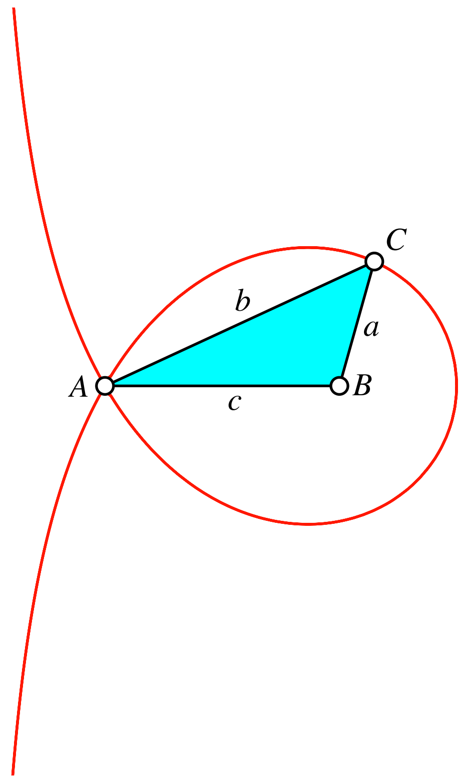

Abb. 1: Trisektrix

Für Punkte C auf der Tropfenschleife gilt in der Bedingung das Plus-Zeichen, außerhalb der Tropfenschleife das Minuszeichen.

Für einen Punkt C auf der Tropfenschleife bedeutet die Bedingung $a^2 + ab = c^2$, dass das Quadrat über c flächengleich ist mit der Vereinigung des Quadrates über a und dem Rechteck über b mit der zweiten Seite a.

2 Winkelhalbierende

Die Winkelhalbierende w_γ unterteilt die Seite c in die Abschnitte (Abb. 2):

$$\overline{AD} = \tfrac{b}{a+b}c \quad \text{und} \quad \overline{BD} = \tfrac{a}{a+b}c$$

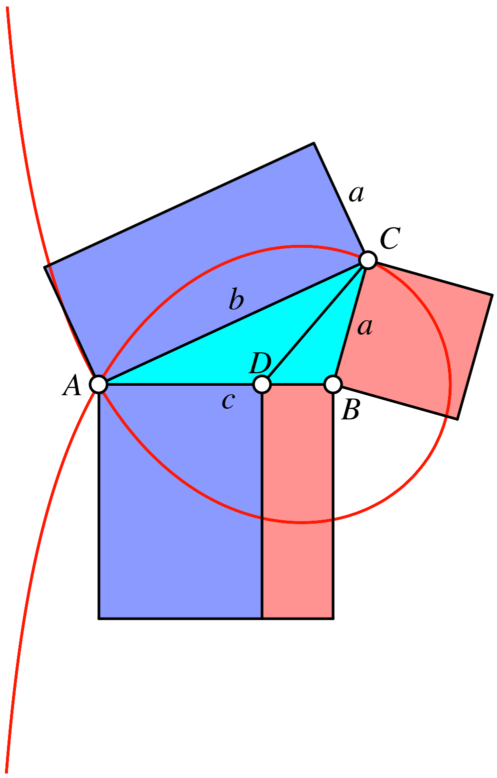

Abb. 2: Winkelhalbierende

Für das rote Hochkant-Rechteck mit der Höhe c erhalten wir wegen $a^2 + ab = c^2$ den Flächeninhalt:

$$\tfrac{a}{a+b}c^2 = \tfrac{a}{a+b}a(a+b) = a^2$$

Das blaue Hochkant-Rechteck hat den Flächeninhalt:

$$\tfrac{b}{a+b}c^2 = \tfrac{b}{a+b}a(a+b) = ab$$

Somit haben gleichfarbige Rechtecke in der Abbildung 2 den gleichen Flächeninhalt. Die Situation erinnert an den Kathetensatz.

Für einen Punkt C außerhalb der Tropfenschleife gilt ein analoger Sachverhalt, der aber mit der äußeren Winkelhalbierenden und Subtraktionen von Flächen arbeitet.

3 Gleichschenklige Trisektrix-Dreiecke

Wir fragen nun speziell nach gleichschenkligen Dreiecken, die der Bedingung $a^2 \pm ab = c^2$ genügen.

(i) Für $a = b$ ergibt sich das rechtwinklige gleichschenklige Dreieck über c (Abb. 3).

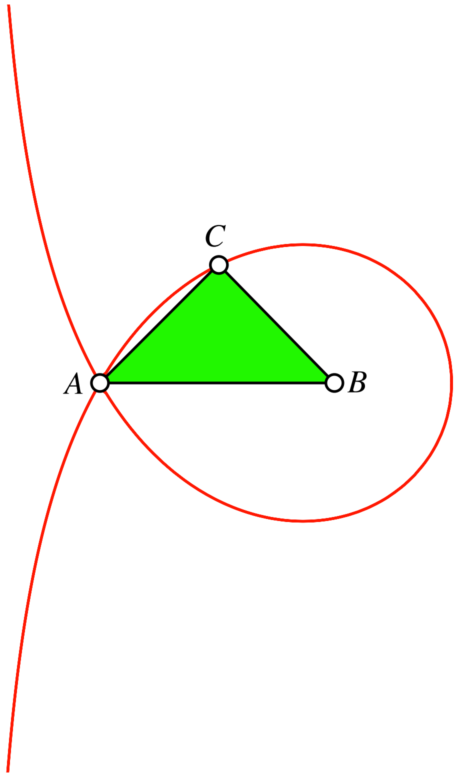

Abb. 3: Rechtwinklig gleichschenkliges Dreieck

(ii) Für $a = c$ wird $b = 0$.

(iii) Für $b = c$ erhalten wir aus $a^2 + ab = c^2$ die Beziehung: $\frac{c}{a} = \Phi$. Dabei bedeutet Φ den Goldenen Schnitt $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$. Über den Goldenen Schnitt siehe (Walser 2013). Die Abbildung 4 illustriert die Situation. Das Dreieck wird als *Spitzes Goldenes Dreieck* bezeichnet.

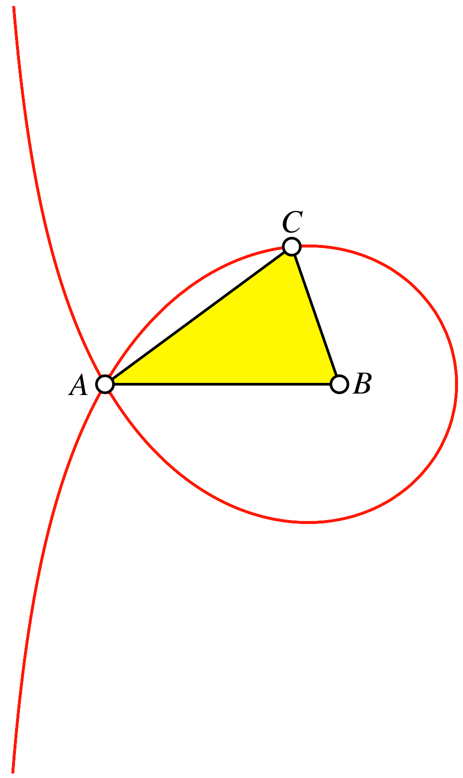

Abb. 4: Spitzes Goldenes Dreieck

(iiii) Ebenfalls für $b = c$ ergibt sich aus $a^2 - ab = c^2$ die Beziehung $\frac{c}{a} = \frac{1}{\Phi}$. Wir erhalten das so genannte *Stumpfe Goldene Dreieck* (Abb. 5).

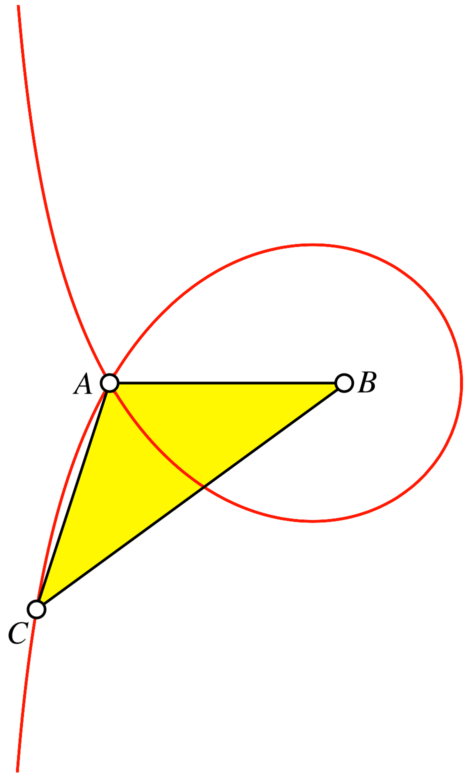

Abb. 5: Stumpfes Goldenes Dreieck

Damit sind alle gleichschenkligen Dreiecke in unserem Kontext besprochen.

4 Nochmals die Winkelhalbierende

Für den Fall des rechtwinklig gleichschenkligen Dreieckes fällt die Winkelhalbierende mit der Höhe zusammen und wir erhalten den Satz des Pythagoras und den zugehörigen Kathetensatz.

Bei den Goldenen Dreiecken teilt die Winkelhalbierende die Gegenseite innen und außen im Verhältnis des Goldenen Schnittes.

Im Spitzen Goldenen Dreieck ergibt sich die Situation der Abbildung 6, wobei wir $c = 1$ setzen. Die beiden blauen Rechtecke sind sogar kongruent. Es handelt sich dabei um so genannte *Goldene Rechtecke*.

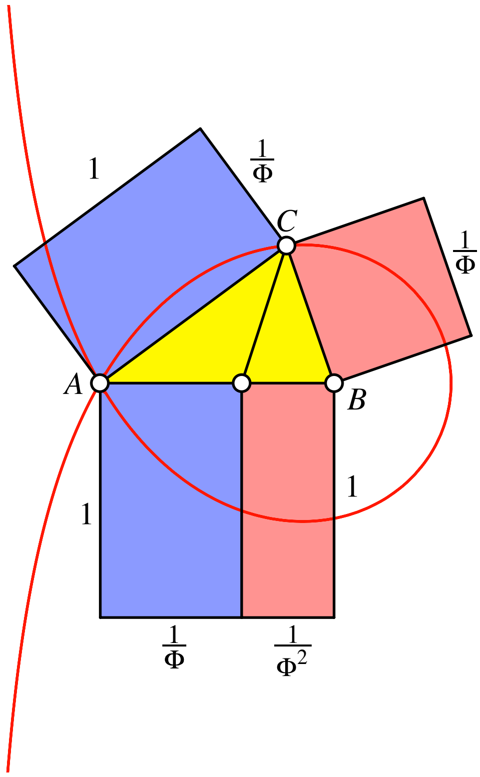

Abb. 6: Unterteilung

Im stumpfen Goldenen Dreieck müssen wir mit der äußeren Winkelhalbierenden arbeiten. Die Situation ist so vertrackt, dass wir drei Abbildungen benötigen (Abb. 7-9).

Die blauen Rechtecke sind wiederum kongruente Goldene Rechtecke.

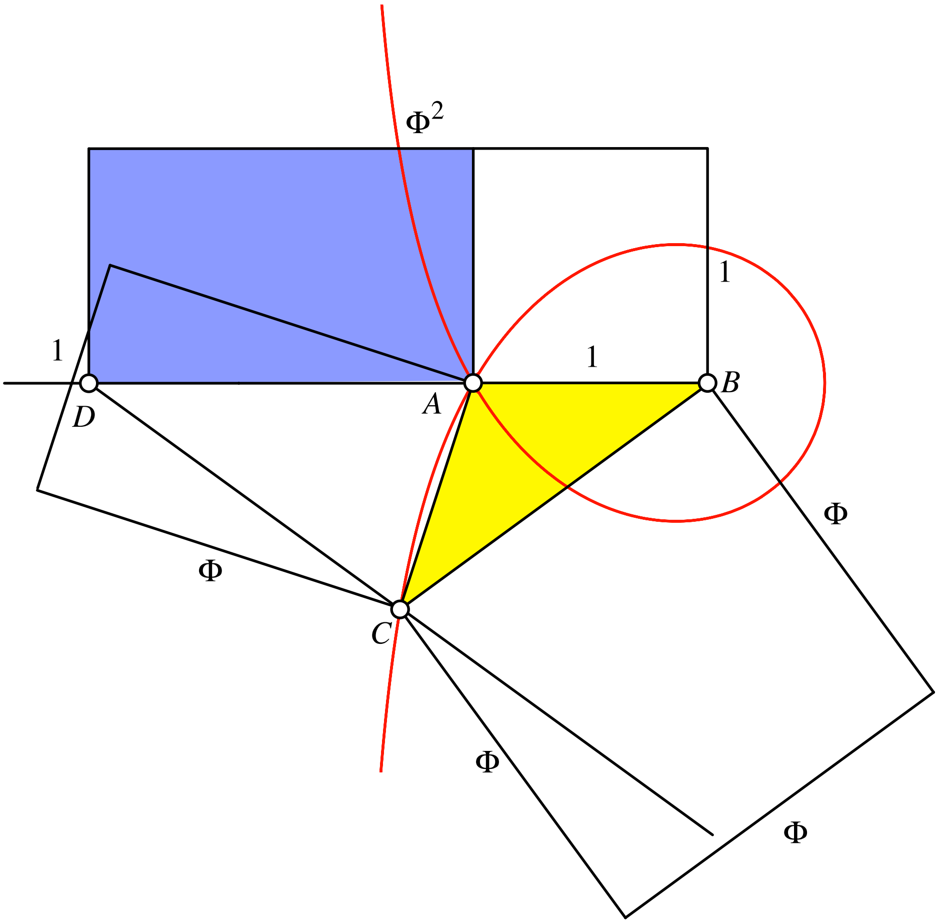

Abb. 7: Blau zum ersten

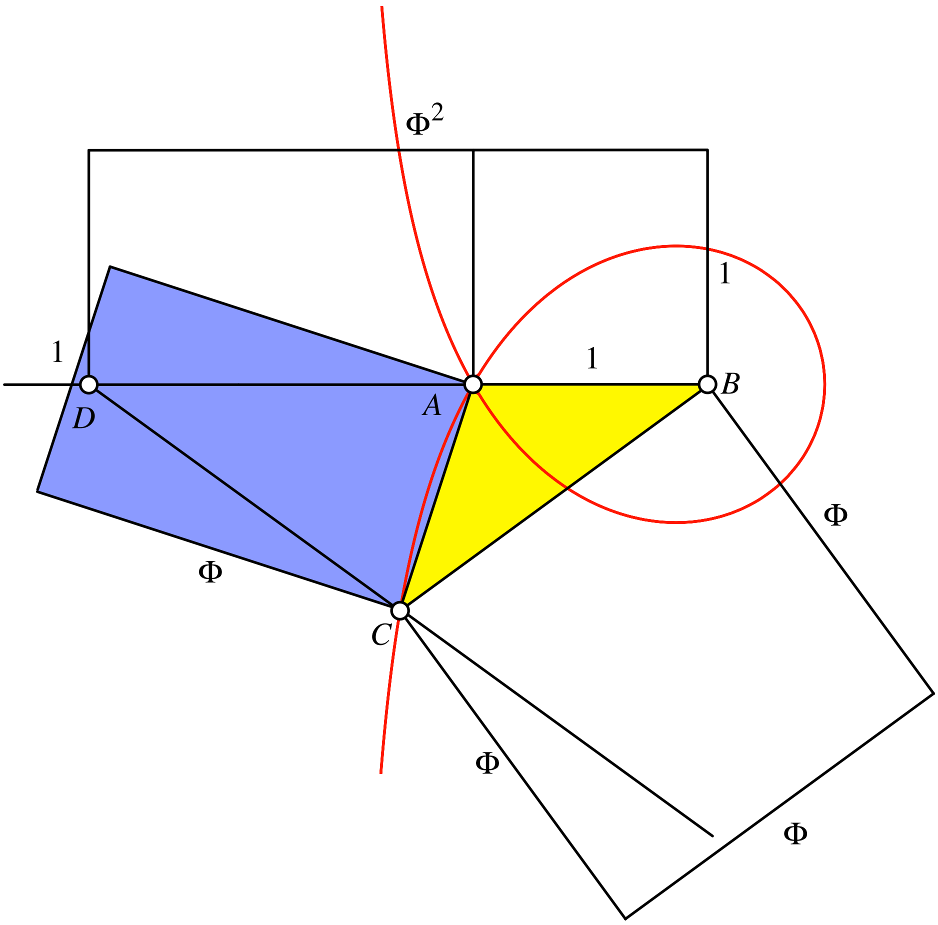

Abb. 8: Blau zum zweiten

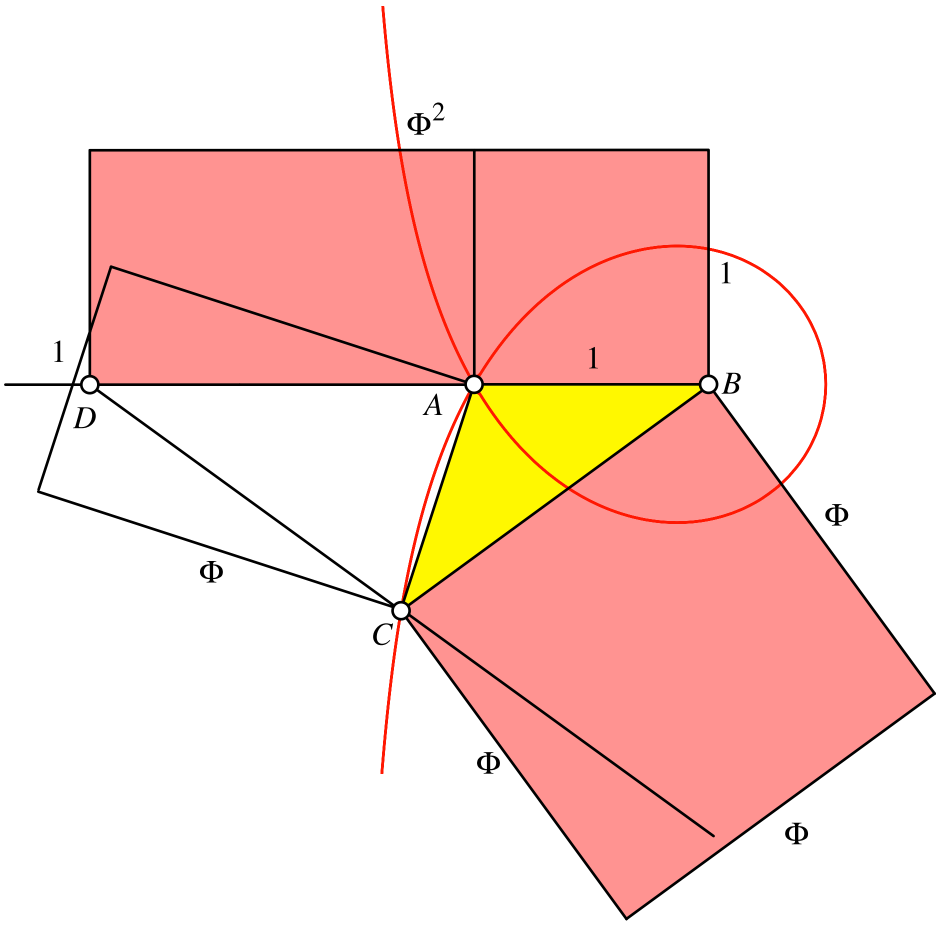

Abb. 9: Rot gleich Rot

Die roten Teile sind eine Vergrößerung der entsprechenden roten Teile der Abbildung 6.

5 Bemerkung

Bei den Trisektrix-Dreiecken gilt auch eine schöne Winkeleigenschaft (Ohne Beweis, siehe Abb. 10).

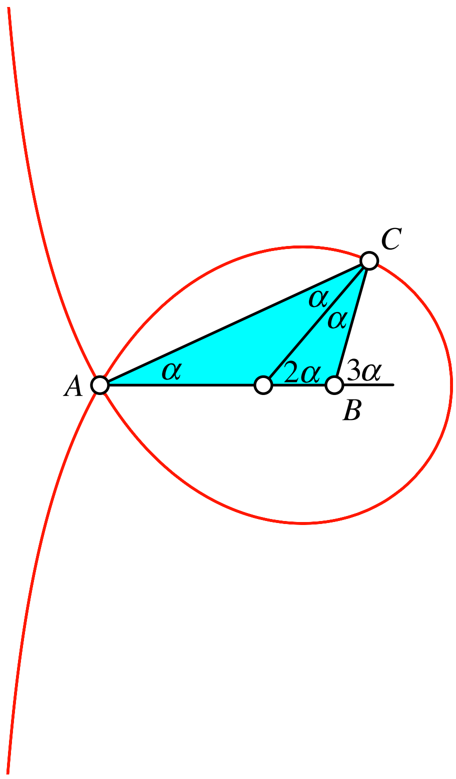

Abb. 10: Winkeleigenschaft

Damit kann die Trisektrix zur Winkeldrittelung verwendet werden. Der zu Drittelnde Winkel muss bei *B* eingepasst werden.

Daher der Name Trisektrix.

Literatur

Walser, Hans (6. Auflage). (2013). *Der Goldene Schnitt*. Mit einem Beitrag von Hans Wußing über populärwissenschaftliche Mathematikliteratur aus Leipzig. Leipzig: Edition am Gutenbergplatz. ISBN 978-3-937219-85-1.