Hans Walser, [20080318a]

Gleichseitig-rechtwinklige Polygone im Raum

Anregung: Chr. W.

1 Worum es geht

Zu jedem $n \geq 6$ gibt es ein gleichseitig-rechtwinkliges Polygon im Raum, welches nicht eben ist. Gezeigt werden mögliche Lösungen; es gibt viele andere Lösungen.

2 Was nicht geht

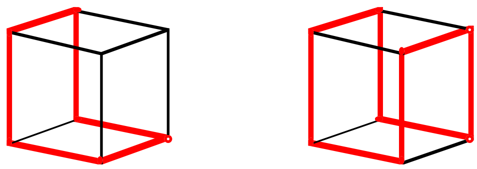
Ein gleichseitiges Dreieck muss das reguläre Dreieck sein, seine Winkel sind $\frac{\pi}{3}$.

Die einzige Möglichkeit eines gleichseitig-rechtwinkligen Viereckes ist das Quadrat, welches eben ist.

Nach einem Satz von van der Waerden ist ein gleichseitig-gleichwinkliges Fünfeck zwangsläufig das ebene reguläre Fünfeck mit Winkeln von $\frac{3\pi}{5}$ (vgl. [van der Waerden 1970], [Lüssy/Trost 1970], [Irminger 1970]). Rechtwinklig ist also nicht möglich.

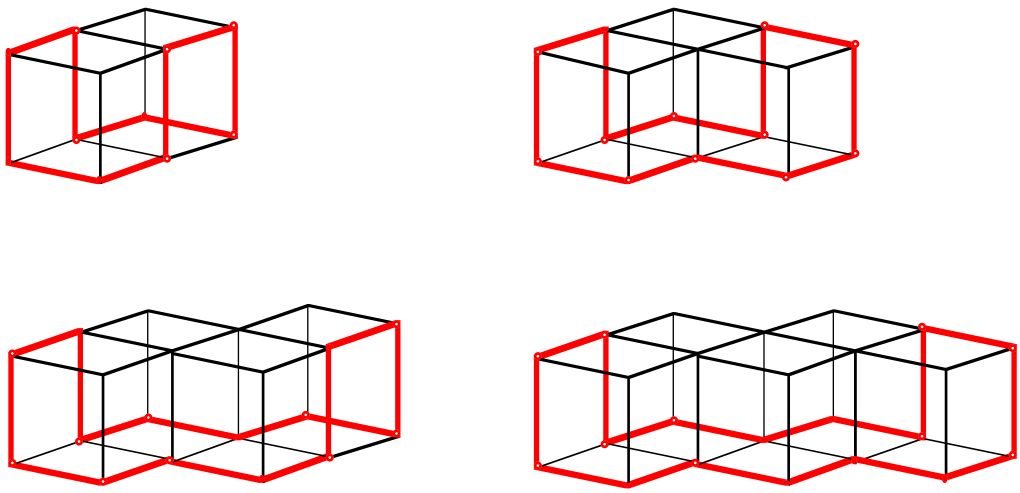
3 Gerade Eckenzahl

Die Figur zeigt zunächst mögliche Lösungen für $n = 6$ und $n = 8$.



Gleichseitig-rechtwinkliges Sechseck und Achteck

Für gerade Eckenzahlen $n \geq 10$ gibt es ein einheitliches Verfahren, ein gleichseitig-rechtwinkliges Polygon in ein Würfelraster einzubetten.



Gleichseitig-rechtwinklige Polygone mit Eckenzahlen 10, 12, 14, 16

4 Ungerade Eckenzahl

4.1 Siebeneck

Das Siebeneck ist speziell. Die Foto zeigt ein Modell. Die Leserin mache sich klar, dass da nichts „gemurkst" ist.

Gleichseitig-rechtwinkliges Siebeneck

Wer meinen mechanischen Fähigkeiten nicht traut: hier die Eckpunktskoordinaten:

$$A\left(\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{1+2\sqrt{2}}+\sqrt{\tfrac{16\sqrt{2}-22}{7}}\right), 0, \sqrt{\tfrac{9-4\sqrt{2}}{7}}\right)$$

$$B\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{1+2\sqrt{2}}, -\tfrac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

$$C\left(0, -\tfrac{1}{2}, 0\right)$$

$$D\left(0, -\tfrac{1}{2}, 1\right)$$

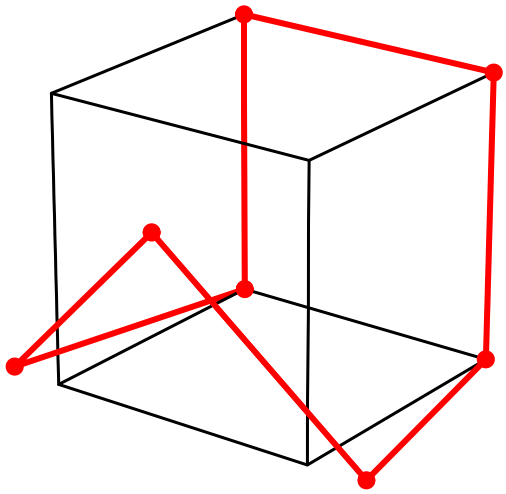
$$E\left(0, \tfrac{1}{2}, 1\right)$$

$$F\left(0, \tfrac{1}{2}, 0\right)$$

$$G\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{1+2\sqrt{2}}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

Diese Eckpunktskoordinaten sind mit Zirkel und Lineal konstruierbar, was für das ebene reguläre Siebeneck nicht möglich ist.

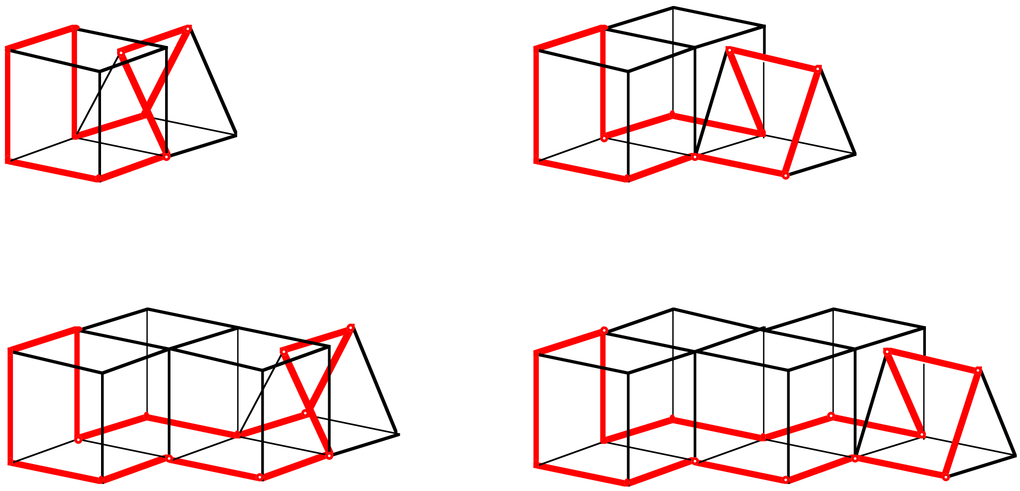
Im Vergleich mit dem Einheitswürfel sieht das Beispiel so aus:



Siebeneck und Würfel

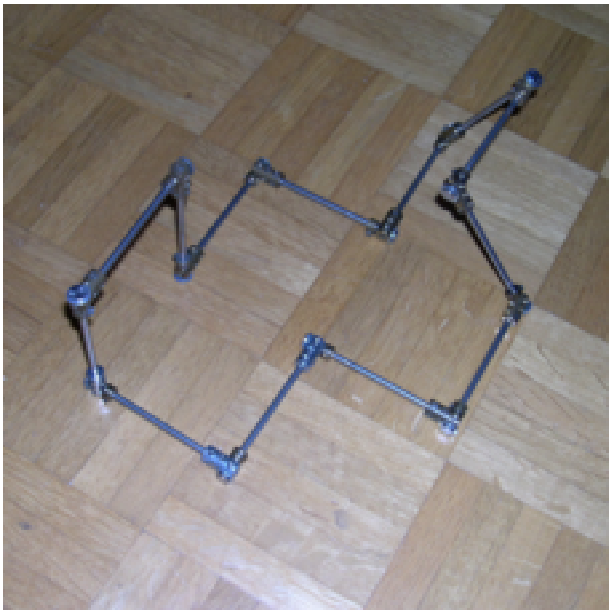
4.2 Ungerade Eckenzahl > 7

Für ungerade Eckenzahlen größer als 7 gibt es ein einheitliches Verfahren, ein Polygon in ein Würfelraster einzubetten, bei welchem am Schluss noch ein Zelt angebaut wird.



Gleichseitig-rechtwinklige Polygone mit Eckenzahlen 9, 11, 13, 15

Als Stimmungsbild eine Modellfoto für die Eckenzahl 13.



Gleichseitig-rechtwinkliges 13-Eck

Literatur

[Irminger 1970] Irminger, H.: Zu einem Satz über räumliche Fünfecke. *Elemente der Mathematik*. Band 25, 1970, S. 135-136

[Lüssy/Trost 1970] Lüssy, W. und E. Trost: Zu einem Satz über räumliche Fünfecke. *Elemente der Mathematik*. Band 25, Heft 4, 10. Juli 1970, S. 82-83

[van der Waerden 1970] Van der Waerden, B. L.: Ein Satz über räumliche Fünfecke. *Elemente der Mathematik*. Band 25, Heft 4, 10. Juli 1970, S. 73-78