Hans Walser, [20160537]

Gleiche Sehnen

Anregung: W. K., F.

1 Worum geht es?

Gegeben seien drei Kreise $k_i(M_i, r_i)$, $i = 1, 2, 3$, und eine Strecke s, die kürzer ist als der kleinste der drei Kreisdurchmesser.

Gesucht ist ein vierter Kreis k, der aus den drei Kreisen Sehnen der gegebenen Streckenlänge s herausschneidet.

2 Lösungsskizze

Zu jedem der drei Kreise k_i, $i = 1, 2, 3$, zeichnen wir einen konzentrischen reduzierten Kreis κ_i mit dem Radius:

$$\rho_i = \sqrt{r_i^2 - \left(\tfrac{s}{2}\right)^2} \qquad (1)$$

Dann lösen wir das Apollonius-Problem für die drei reduzierten Kreise κ_i.

Es gibt $2^3 = 8$ Lösungen.

Mit ρ als dem Radius einer Lösung κ ist r mit

$$r = \sqrt{\rho^2 + \left(\tfrac{s}{2}\right)^2} \qquad (2)$$

der Radius einer Lösung für unser Problem.

Die Aufgabe ist mit Zirkel und Lineal lösbar.

3 Exemplarische Lösung

Die Abbildung 1 zeigt die Aufgabenstellung, die Abbildungen 2 bis 5 eine Lösung.

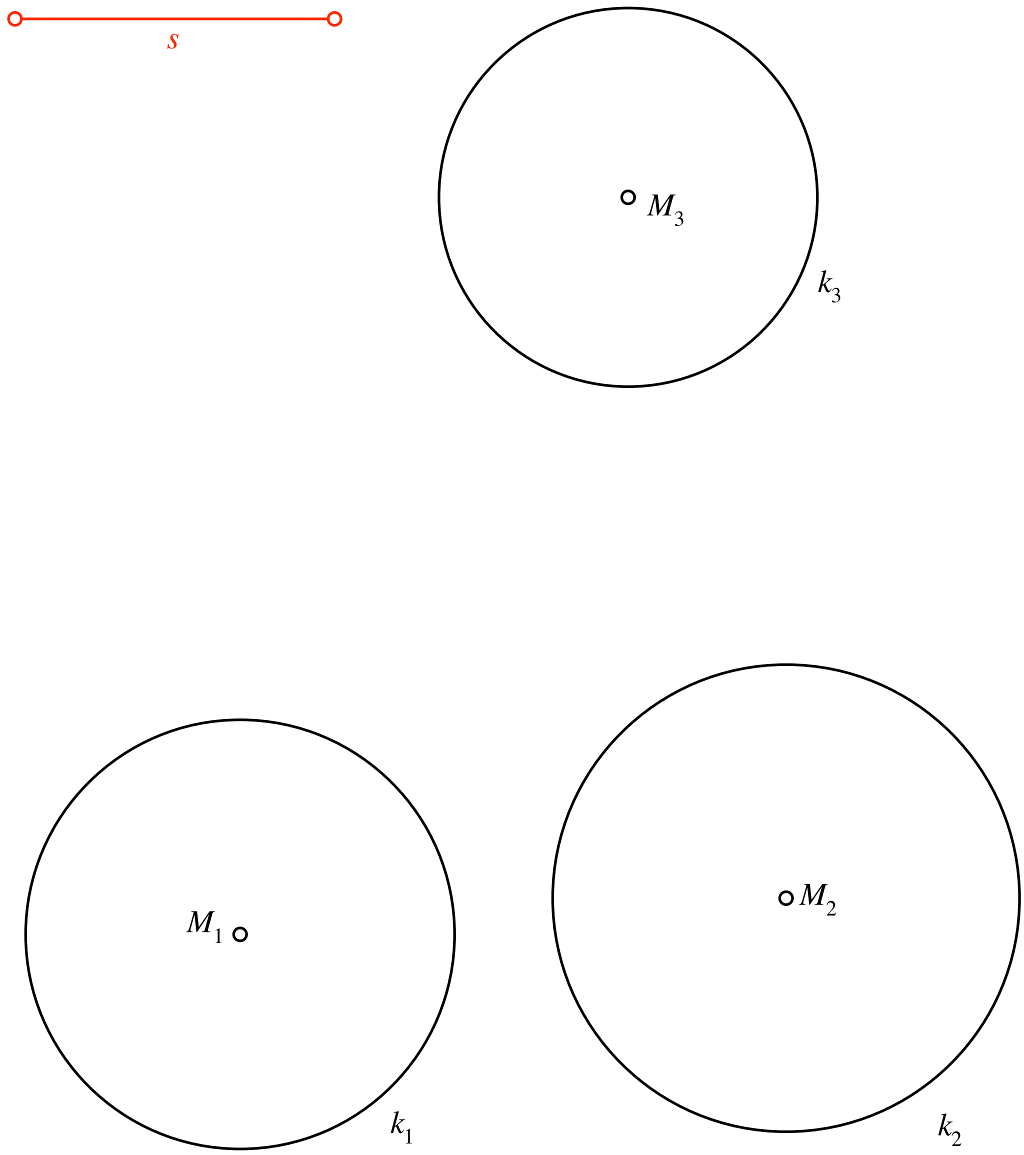

Abb. 1: Aufgabenstellung

Als erstes konstruieren wir die reduzierten Kreise κ_i , $i = 1, 2, 3$ (blau in Abb. 2).

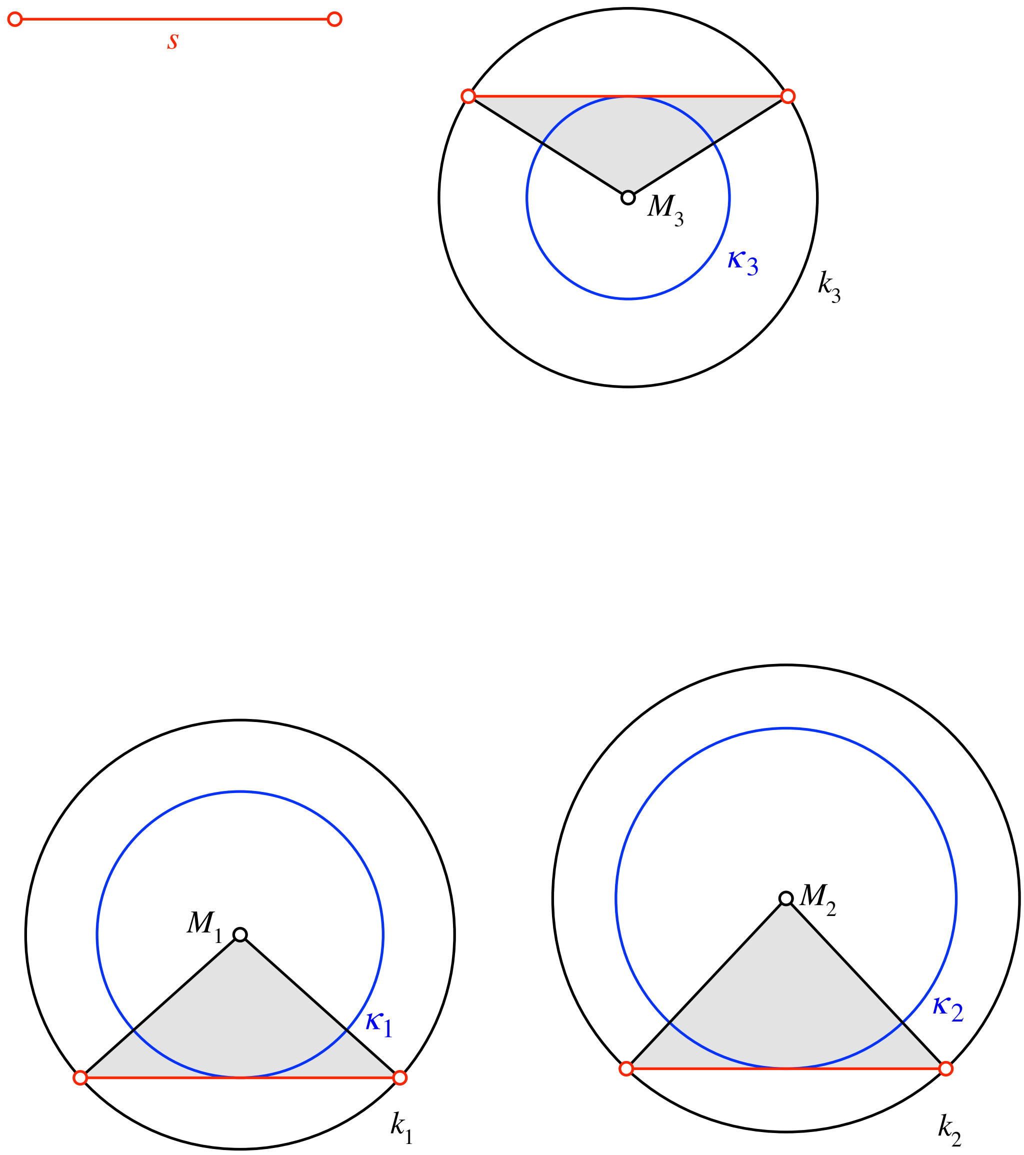

Abb. 2: Reduzierte Kreise

Nun kommt der aufwändigste Teil. Zu den drei reduzierten Kreisen suchen wir einen vierten Kreis, der alle drei berührt. Dies ist das Problem des Apollonius von Perge (ca. 262 v. Chr. – ca. 190 v. Chr.). Es gibt $2^3 = 8$ Lösungen je nach der Berührung von innen oder von außen. Das Problem ist mit Zirkel und Lineal lösbar, aber aufwändig. Einfacher geht es mit Hyperbeln nach Adriaan van Roomen (1561-1615).

Im Folgenden wird der Fall einer durchgehenden Berührung von außen weiterbearbeitet (Abb. 3).

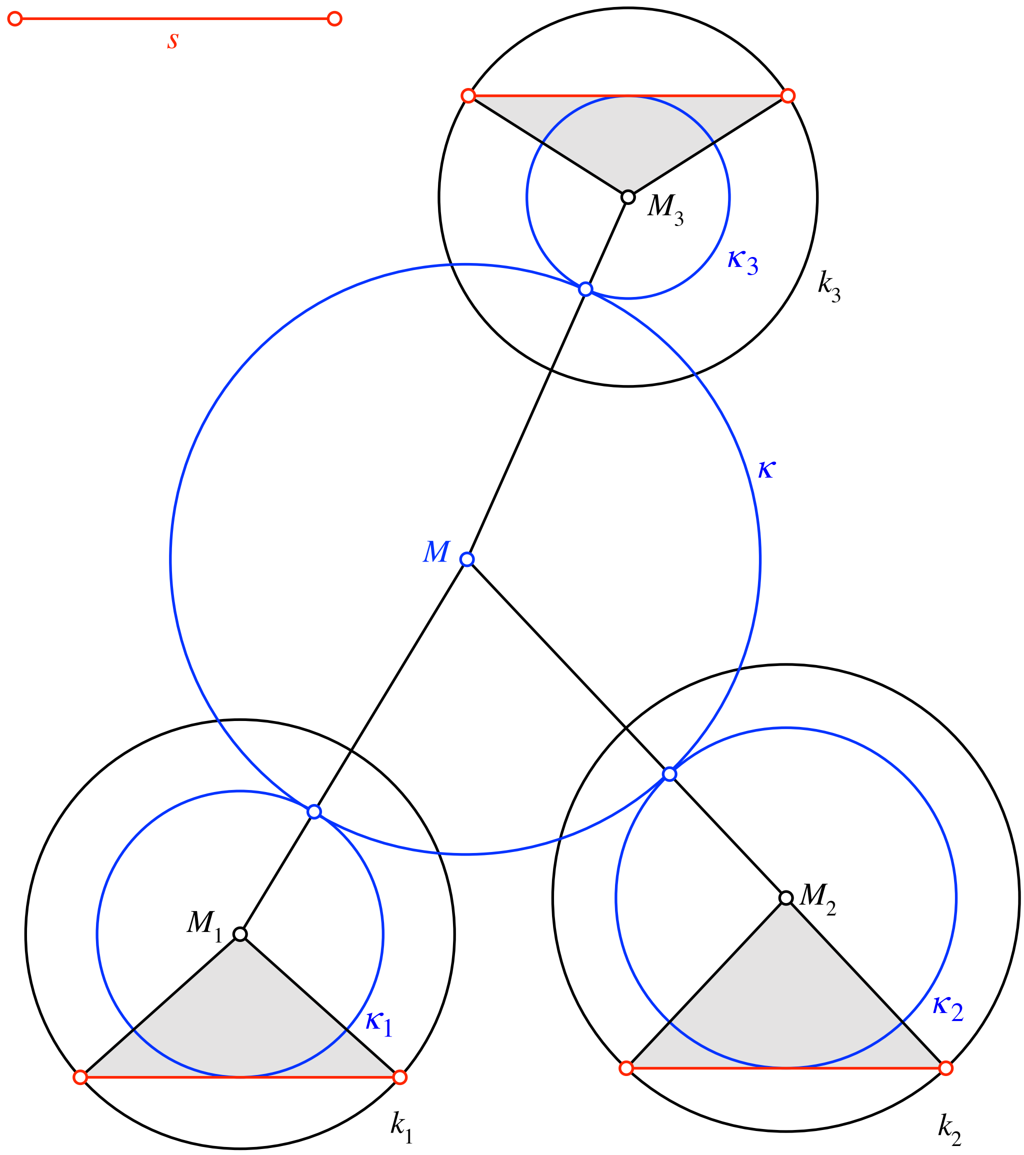

Abb. 3: Berührender Kreis

Die Abbildung 4 zeigt nun, wie wir zu unserem gesuchten Kreis k kommen.

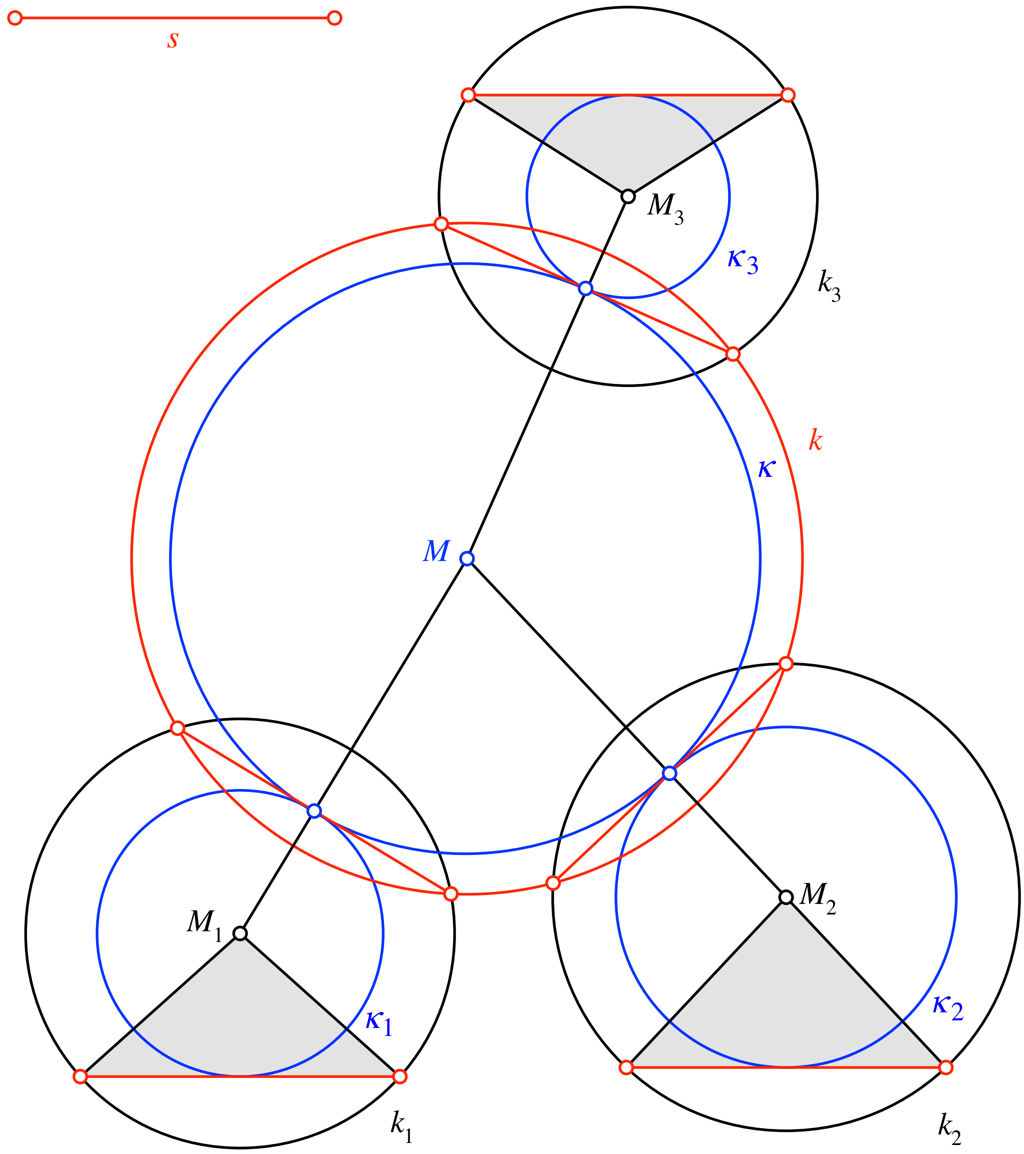

Abb. 4: Lösung unseres Problems

Die Abbildung 5 hat rein ästhetischen Charakter.

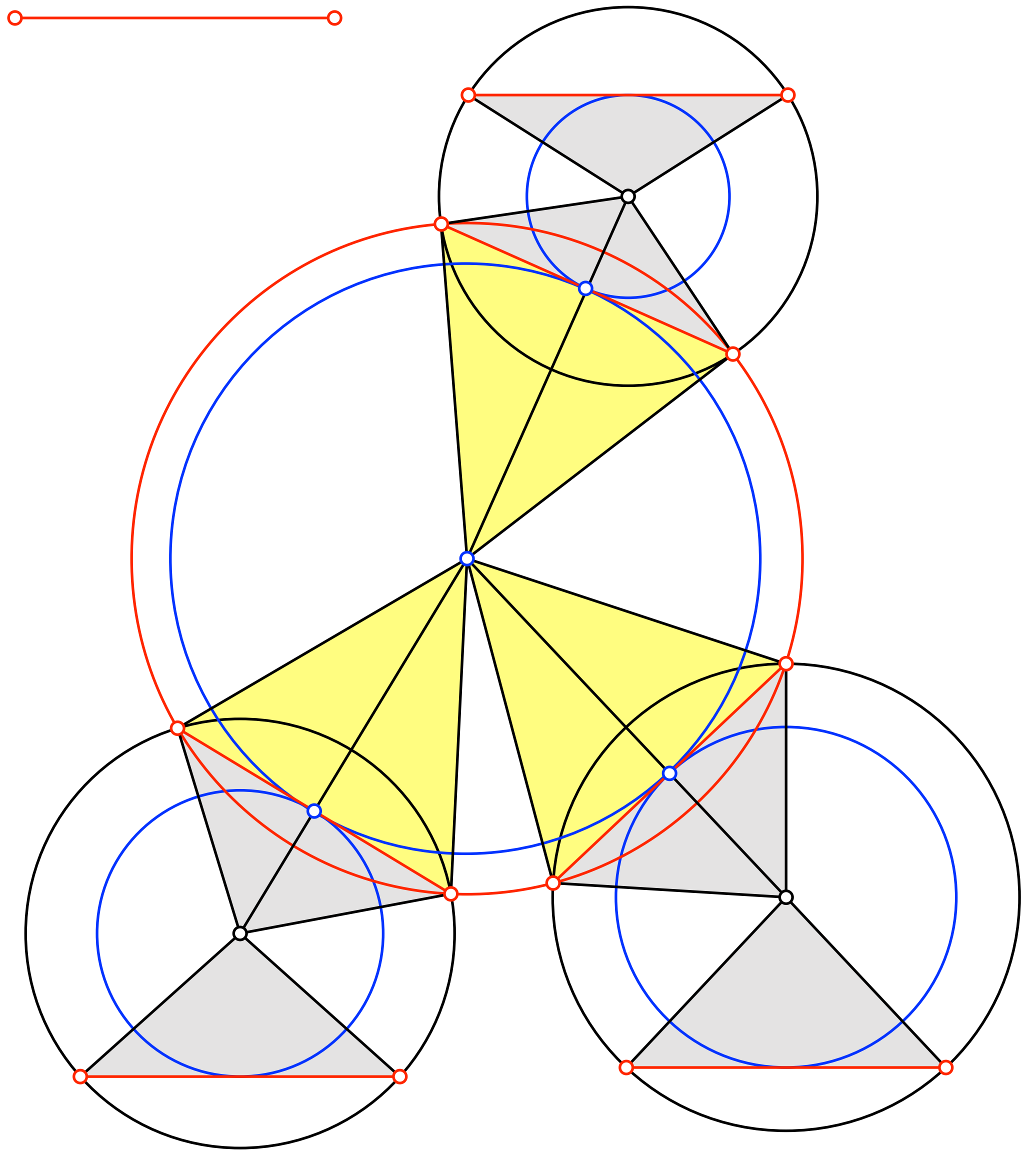

Abb. 5: Voilà