Hans Walser, [20160521]

Gigampfi

0 Worum geht es?

Es werden zwei Gigampfi-Probleme mit invarianten Winkeln vorgestellt.

1 Beispiel 1

1.1 Das Problem

An der Spitze eines gleichseitigen Dreiecks bringen wir einen drehbaren Balken an (Abb. 1). So entsteht eine Gigampfi (Wippe, Schaukel).

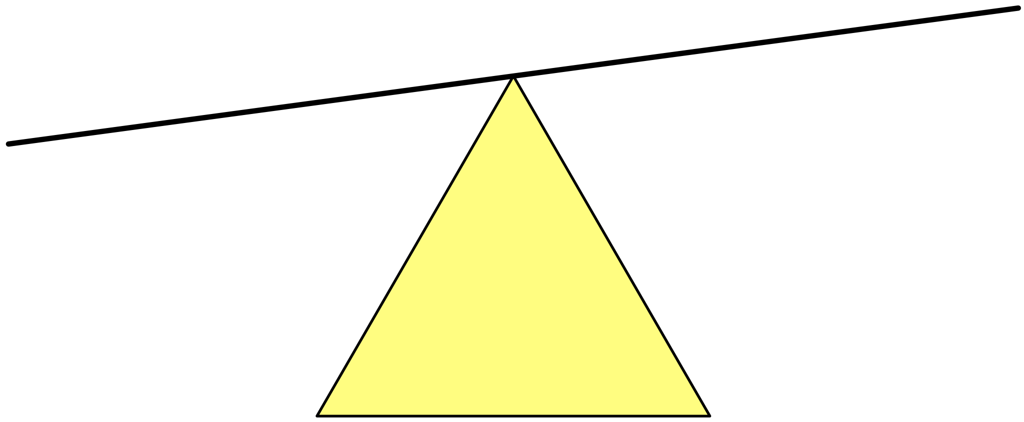

Abb.1: Gigampfi

Nun fügen wir auf beiden Seiten des gleichseitigen Dreieckes je ein gleichschenkliges Dreieck an (Abb. 2).

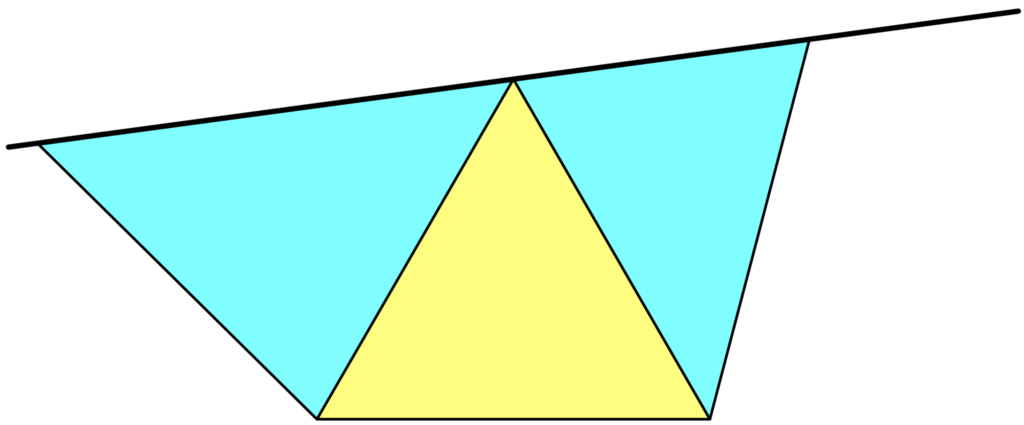

Abb. 2: Gleichschenklige Dreiecke

Wie groß ist der Diagonalen-Schnittwinkel des Umrissviereckes (rot in Abb. 3)?

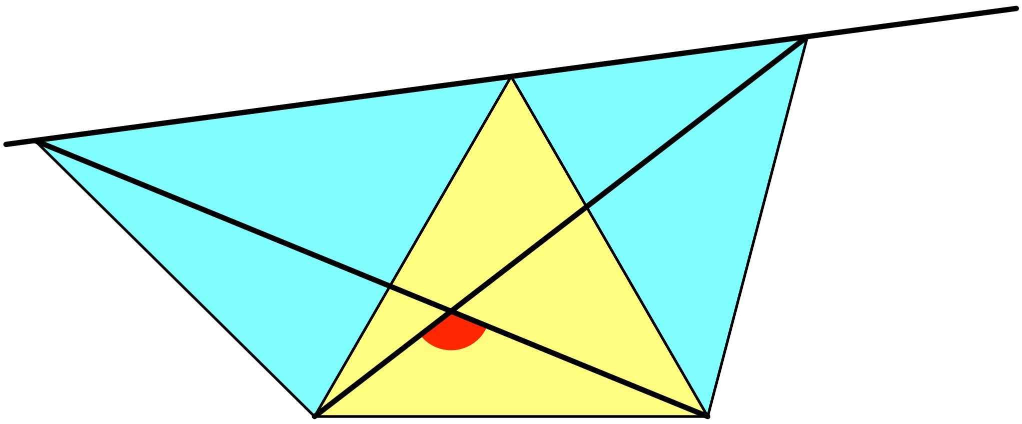

Abb. 3: Wie groß ist der rote Winkel?

1.2 Bearbeitung

In der Abbildung 4 sind die auf Grund der Konstruktion gleich langen Strecken blau eingezeichnet.

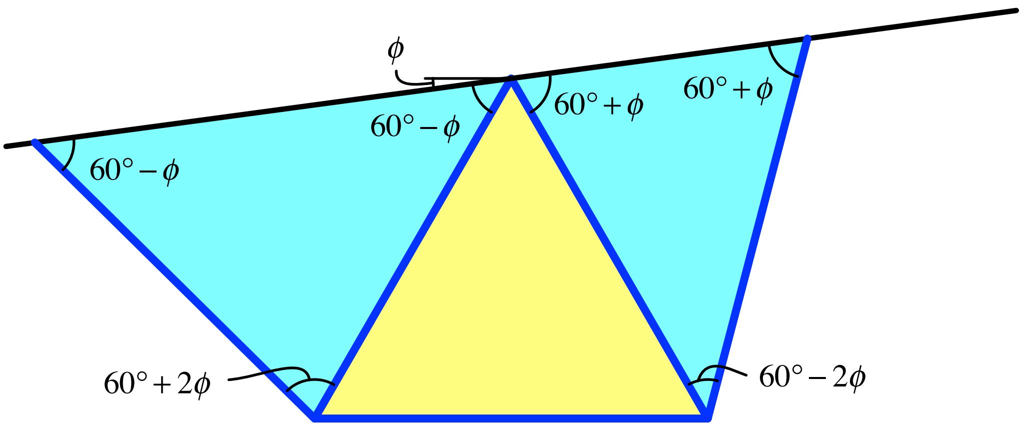

Abb. 4: Winkel in den gleichschenkligen Dreiecken

Mit ϕ bezeichnen wir den Neigungswinkel des Balkens gegenüber der Horizontalen. Damit lassen sich die Winkel in den beiden gleichschenkligen Dreiecken angeben.

Durch die Diagonalen des Umrissviereckes entstehen zwei weitere gleichschenklige Dreiecke (grün in Abb. 5).

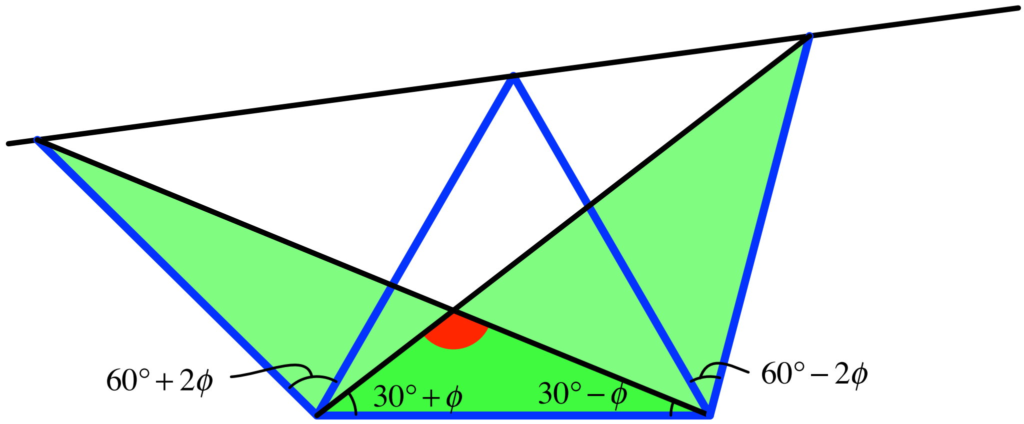

Abb. 5: Weitere gleichschenklige Dreiecke

Das linke grüne gleichschenklige Dreieck hat die Winkel $120° + 2\phi$, $30° - \phi$, $30° - \phi$. Das rechte Dreieck hat die Winkel $120° - 2\phi$, $30° + \phi$, $30° + \phi$.

Damit sind im Überlappungsdreieck der beiden grünen Dreieck zwei Winkel bekannt, nämlich $30° + \phi$ und $30° - \phi$. Der dritte Winkel ist der gesuchte rote Winkel. Er misst 120°.

Der rote Winkel ist unabhängig von ϕ . Er bleibt beim Gigampfen konstant.

Der Diagonalen-Schnittpunkt wandert auf einem Ortsbogen (Abb. 6).

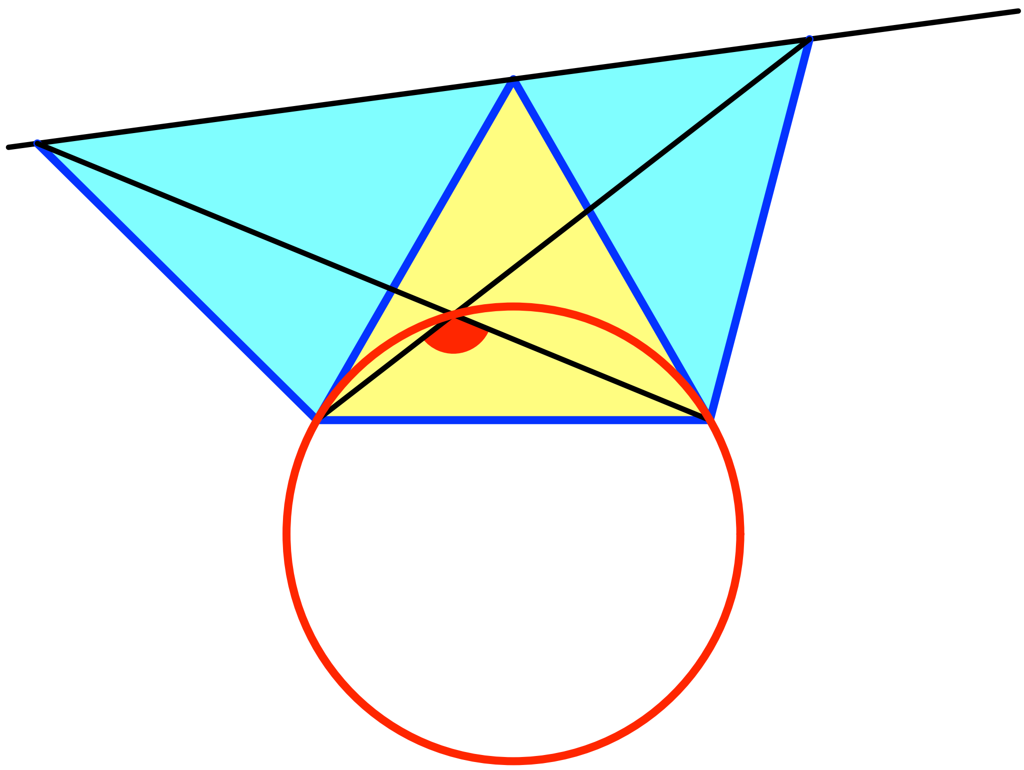

Abb. 6: Ortsbogen

Die Figur lässt sich zyklisch anordnen und mit weiteren gleichseitigen Dreiecken ergänzen (Abb. 7). Die Diagonalen bilden nun ein gleichwinkliges, aber nicht gleichseitiges Sechseck.

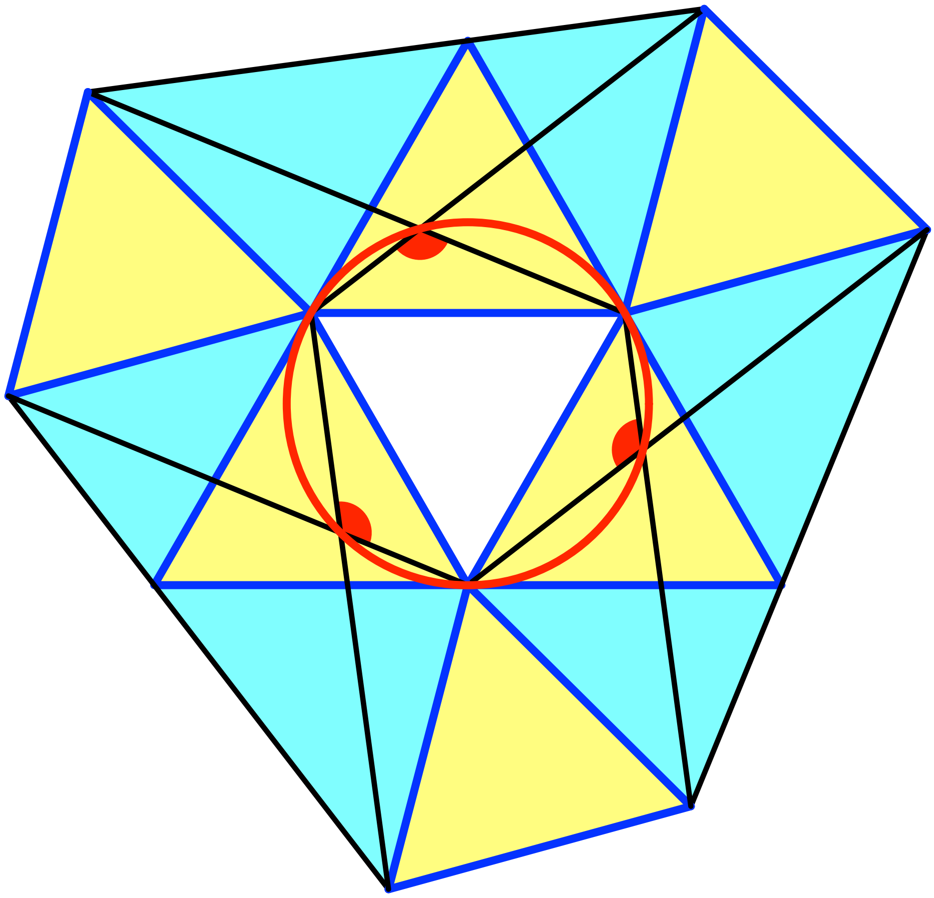

Abb. 7: Zyklische Anordnung

1.3 Verallgemeinerung?

Es ist nicht möglich, das gleichseitige Dreieck durch ein gleichschenkliges Dreieck zu ersetzen (Abb. 8).

Der Schnittpunkt der Diagonalen wandert auf einer brezelartigen Kurve. Der Schnittwinkel ist nicht konstant.

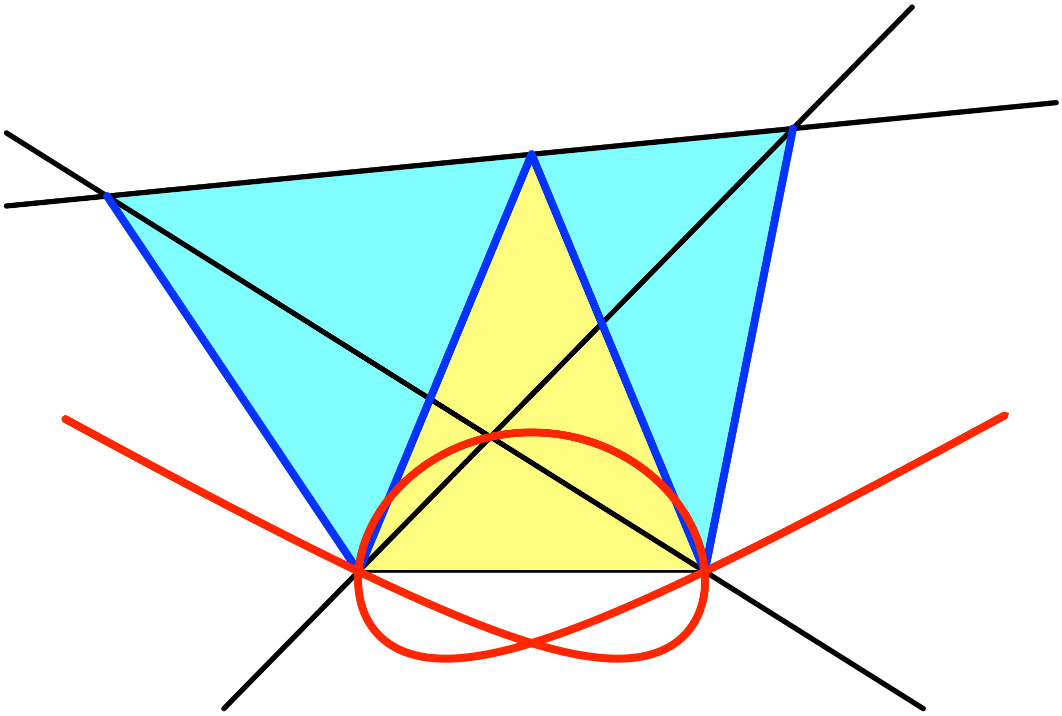

Abb. 8: Die Brezel

2 Beispiel 2

2.1 Problem

Wir fügen die beiden gleichschenkligen Dreiecke gemäß Abbildung 9 an.

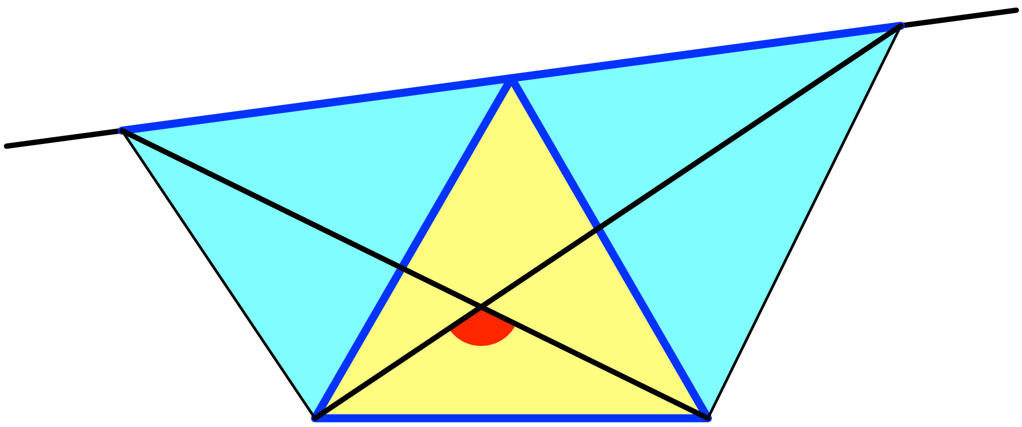

Abb. 9: Variante

Wieder ist der Diagonalen-Schnittpunkt invariant.

Im Unterschied zum ersten Beispiel funktioniert die Invarianz nun auch im allgemeinen Fall mit einem gleichschenkligen Dreieck als Stützdreieck (Abb. 10).

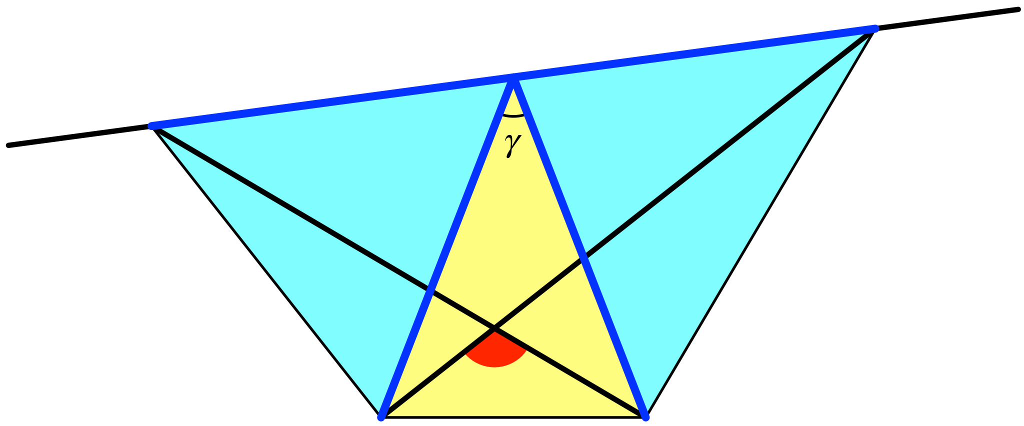

Abb. 10: Gleichschenkliges Dreieck als Stützdreieck

2.2 Bearbeitung

Wir zeigen gleich den allgemeinen Fall der Abbildung 10. Den Winkel an der Spitze des Stützdreieckes bezeichnen wir mit γ .

Mit ϕ bezeichnen wir wieder den Neigungswinkel des Balkens gegenüber der Horizontalen (Abb. 11). Wir arbeiten nun mit den beiden magenta eingezeichneten gleichschenkligen Dreiecken.

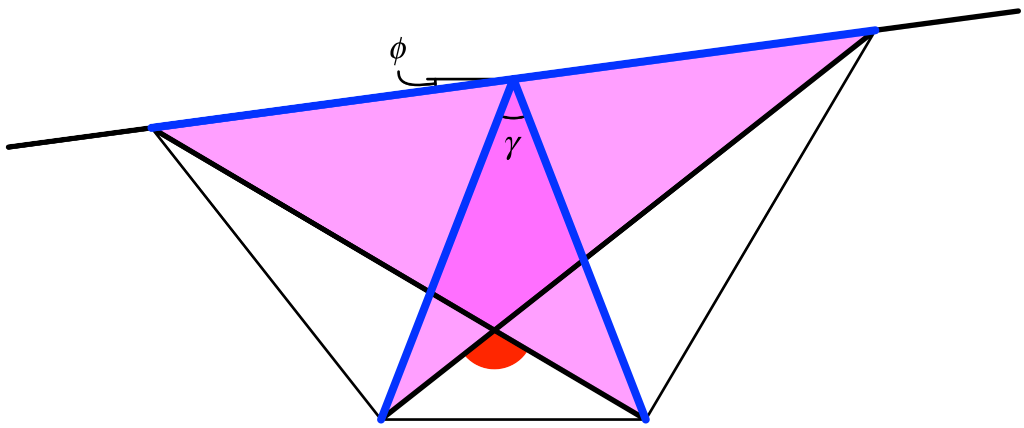

Abb. 11: gleichschenklige Dreiecke

Das linke magenta gleichschenklige Dreieck hat die Winkel:

$$90° + \frac{\gamma}{2} - \phi, \quad 45° - \frac{\gamma}{4} + \frac{\phi}{2}, \quad 45° - \frac{\gamma}{4} + \frac{\phi}{2} \tag{1}$$

Das rechte Dreieck hat die Winkel:

$$90° + \frac{\gamma}{2} + \phi, \quad 45° - \frac{\gamma}{4} - \frac{\phi}{2}, \quad 45° - \frac{\gamma}{4} - \frac{\phi}{2} \tag{2}$$

In der Abbildung 12 sind einige der Winkel eingetragen.

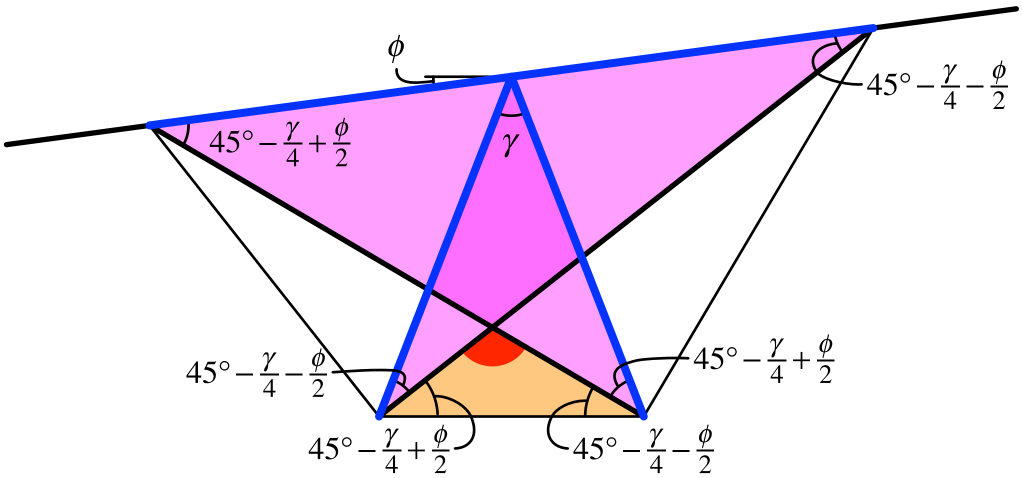

Abb. 12: Winkel

Für das orange Dreieck (nicht gleichschenklig) erhalten wir an der Basislinie die beiden Winkel:

$$\begin{aligned} \left(90° - \frac{\gamma}{2}\right) - \left(45° - \frac{\gamma}{4} - \frac{\phi}{2}\right) &= 45° - \frac{\gamma}{4} + \frac{\phi}{2} \\ \left(90° - \frac{\gamma}{2}\right) - \left(45° - \frac{\gamma}{4} + \frac{\phi}{2}\right) &= 45° - \frac{\gamma}{4} - \frac{\phi}{2} \end{aligned} \tag{3}$$

Somit ergibt sich für den gesuchten roten Winkel:

$$180° - \left(45° - \frac{\gamma}{4} + \frac{\phi}{2}\right) - \left(45° - \frac{\gamma}{4} - \frac{\phi}{2}\right) = 90° + \frac{\gamma}{2} \tag{4}$$

Dies ist unabhängig vom Winkel ϕ und damit eine Invariante beim Gigampfen. Für ein gleichseitiges Stützdreieck ist der rote Winkel = 120°.