Hans Walser, [20140122]

# Gerade im Viereck

## 1 Worum geht es

In einem Viereck liegen der Diagonalen-Schnittpunkt, der Eckenschwerpunkt und der Flächenschwerpunkt auf einer Geraden (Seebach, 1994). Es wird eine allgemeine Eigenschaft dieser Geraden gezeigt.

## 2 Die Schwerpunkte

### 2.1 Eckenschwerpunkt

Die Abbildung 1 zeigt eine Konstruktion des Eckenschwerpunktes.

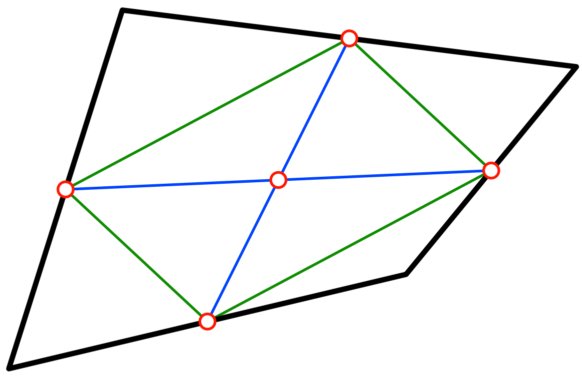

**Abb.1: Eckenschwerpunkt**

Der Eckenschwerpunkt ist der Mittelpunkt des Kantenmittenparallelogramms. Die Seiten dieses Parallelogramms sind parallel zu den Viereckdiagonalen (Strahlensätze).

### 2.2 Flächenschwerpunkt

Die Abbildung 2 zeigt eine Konstruktion des Flächenschwerpunktes. Wir dritteln die Kanten des Viereckes und ergänzen zu einem Parallelogramm, dessen Seiten parallel zu den Viereckdiagonalen sind (Strahlensätze). Der Mittelpunkt dieses Parallelogramms ist der Flächenschwerpunkt.

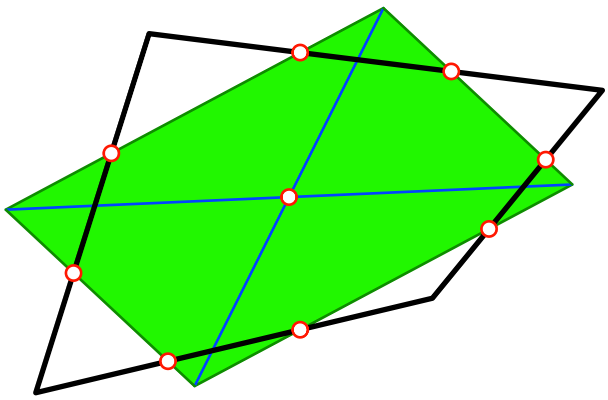

**Abb. 2: Flächenschwerpunkt**

### 2.3 Die Gerade

Die Abbildung 3 zeigt die beiden Schwerpunkte und den Diagonalen-Schnittpunkt. Die drei Punkte liegen auf einer Geraden.

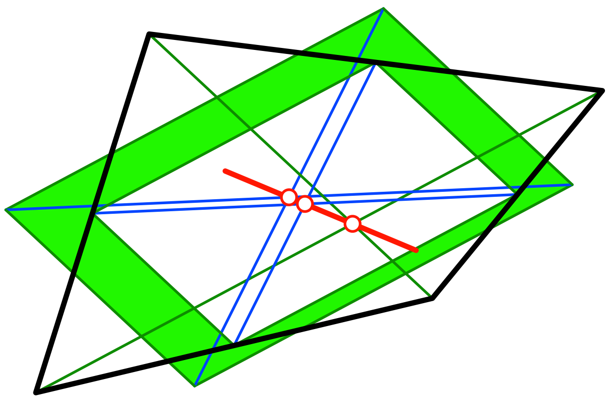

**Abb. 3: Drei Punkte auf einer Geraden**

## 3 Verallgemeinerung

Die bisherigen Konstruktionen legen nahe, wie folgt vorzugehen. Wir unterteilen die Viereckseiten im Verhältnis $\lambda : \mu : \lambda$ , ergänzen zu einem Parallelogramm, dessen Seiten parallel zu den Viereckdiagonalen sind (Strahlensätze), und nehmen den Mittelpunkt dieses Parallelogramms. Die Abbildung 4 zeigt einige Konstruktionen dieser Art, die Viereckkanten sind in Sechstel aufgeteilt.

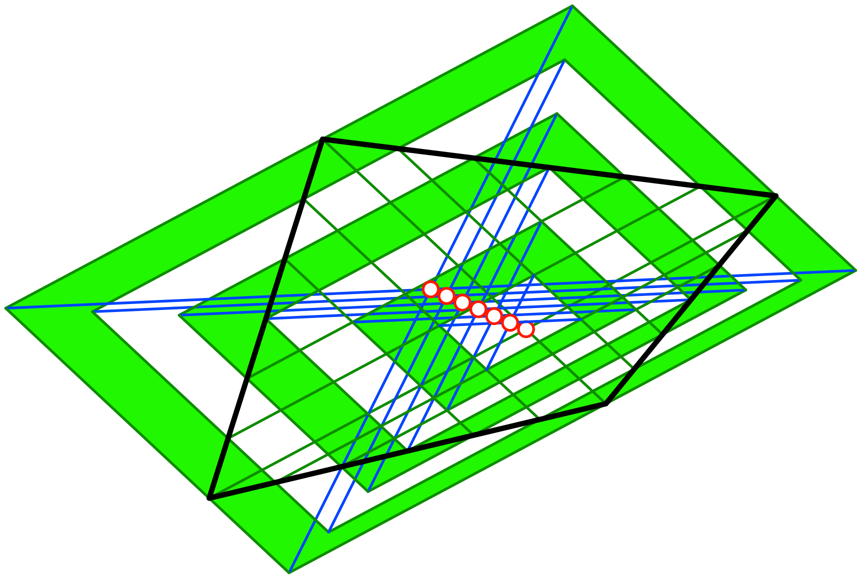

**Abb. 4: Parallelogramme**

Die Mittelpunkte der Parallelogramme liegen offenbar auf einer Geraden.

## 4 Raumgeometrische Überlegung

Wir können die Figur räumlich sehen, die roten Mittelpunkte liegen auf der Schnittgeraden der beiden durch Niveaulinien angegebenen blauen Ebenen. Wir sehen in ein Loch, das die Form einer umgekehrten schiefen Pyramide hat (Abb. 5).

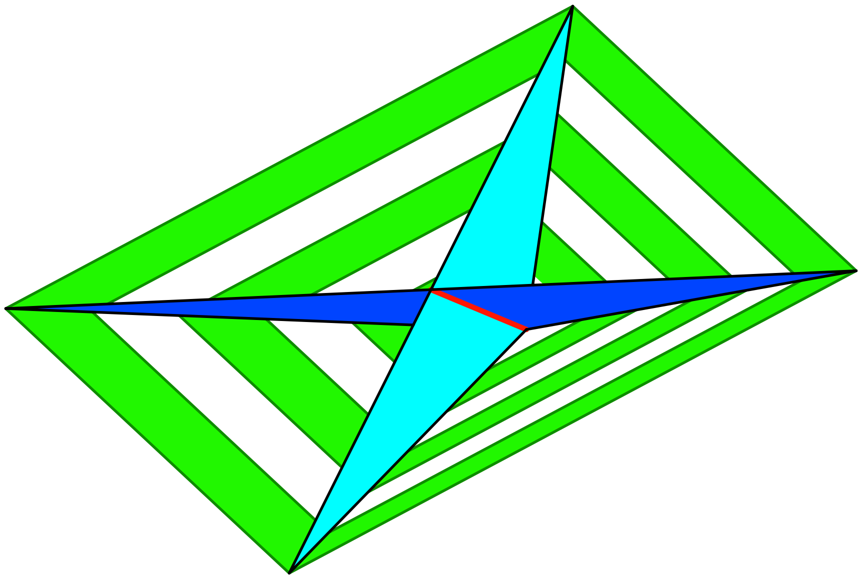

**Abb. 5: Pyramidenloch**

## 5 Rechnerischer Beweis

Für den Beweis verwenden wir ein schiefes $u,v$-Koordinatensystem mit den Diagonalen des Vierecks als Achsen und dem Diagonalen-Schnittpunkt als Ursprung (Abb. 6).

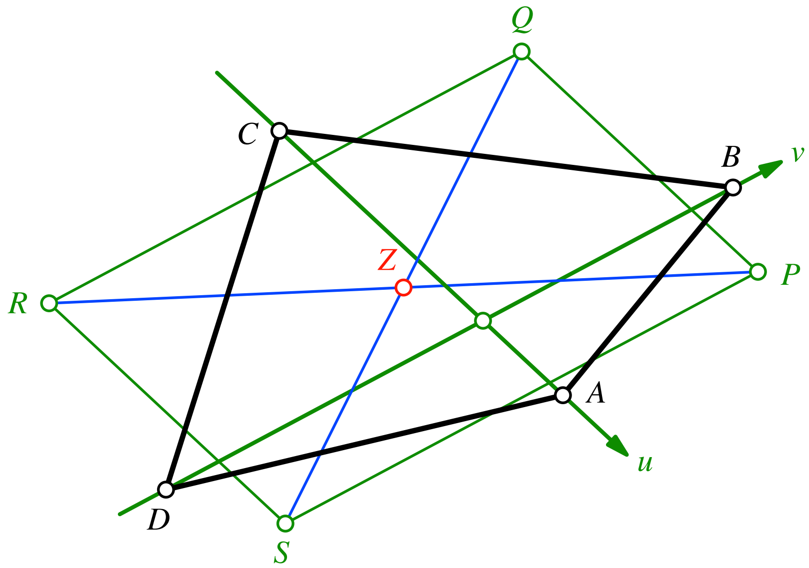


**Abb. 6: Beweisdisposition**

In diesem Koordinatensystem können die Eckpunkte Viereckes *ABCD* wie folgt beschrieben werden: $A(a,0)$, $B(0,b)$, $C(-c,0)$, $D(0,-d)$.

Aus dem Teilverhältnis $\lambda:\mu:\lambda$ bilden wir den Parameter $t=\frac{\lambda+\mu}{\mu+\lambda+\mu}$. Für die Seitengeraden des Parallelogramms *PQRS* ergeben sich damit die Gleichungen:

$$\begin{aligned} SP:&\quad u=ta\\ PQ:&\quad v=tb\\ QR:&\quad u=-tc\\ RS:&\quad v=-td \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir für die Eckpunkte des Parallelogramms *PQRS* die Koordinaten:

$$P(ta,tb),\quad Q(-tc,tb),\quad R(-tc,-td),\quad S(ta,-td)$$

Für den Mittelpunkt *Z* des Parallelogramms *PQRS* ergibt sich schließlich:

$$M\left(\tfrac{t}{2}(a-c),\tfrac{t}{2}(b-d)\right)$$

Dieser Punkt beschreibt in Abhängigkeit von *t* eine Gerade durch den Ursprung mit dem Richtungsvektor (der Richtungsvektor bezieht sich natürlich auf das schiefe $u,v$-Koordinatensystem):

$$\vec{r}=\begin{bmatrix} a-c\\ b-d \end{bmatrix}$$

Die Richtung ist also durch die Differenzen der Diagonalen-Abschnitte definiert. Der Richtungsvektor ist genau dann von null verschieden, wenn das Viereck nicht punktsymmetrisch ist.

Spezielle Punkte:

$t = 0$: Diagonalen-Schnittpunkt

$t = \frac{1}{2}$: Eckenschwerpunkt

$t = \frac{2}{3}$: Flächenschwerpunkt

Ich frage mich, ob es mit dem zu $t = 1$ gehörenden Punkt auch eine spezielle Bewandtnis hat.

## Literatur

Seebach, Karl (1994): Nochmals Viereckschwerpunkte. DdM, Didaktik der Mathematik, 22. Jahrgang, Heft 4, 309-315.