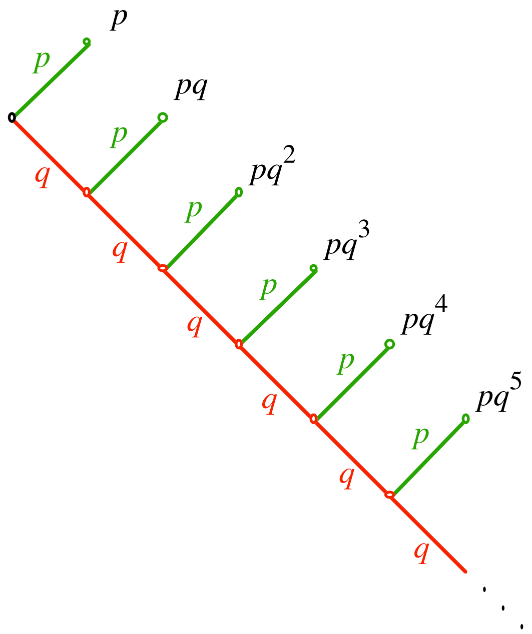
Hans Walser, [20090316b]

Geometrische Reihe

Für $0 < q < 1$ lässt sich die Formel

$$1 + q + q^2 + q^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \tfrac{1}{1-q}$$

mit einer Wahrscheinlichkeitsüberlegung herleiten. Wir denken uns ein Bernoulli-Experiment mit der Erfolgswahrscheinlichkeit $p = 1 - q$ und wiederholen dieses Experiment, bis ein Erfolg eintritt. Das gibt Anlass zu folgendem unendlich langen Baum.



Baum

Die Wahrscheinlichkeit, nach $(k-1)$ Spielen Erfolg zu haben, ist pq^k. Da die Summe aller Wahrscheinlichkeiten aber 1 ist, erhalten wir:

$$p + pq + pq^2 + pq^3 + \cdots = p\left(1 + q + q^2 + q^3 + \cdots\right) = p\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1$$

Wegen $p = 1 - q$ haben wir $(1-q)\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1$ und daher $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \tfrac{1}{1-q}$.