Hans Walser, [20090526a]

Geometrische Fibonacci-Folge

1 Worum es geht

1.1 Beispiel

Wir arbeiten mit der Matrix

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und dem Startvektor:

$$f_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit bilden wir die geometrische Vektorfolge:

$$f_n = Q^n f_0$$

Die Folge $f_0, \dots, f_8$ lässt erkennen, dass die Vektoren aus den Fibonacci-Zahlen gebildet sind.

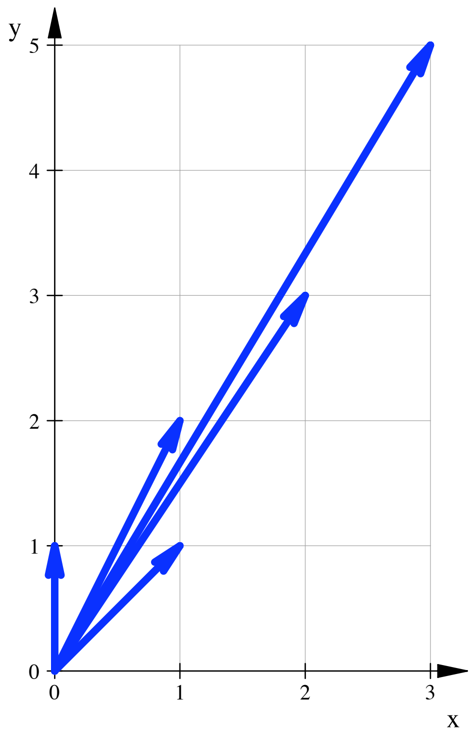
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 13 \\ 21 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 21 \\ 34 \end{pmatrix}$$

Fibonacci-Vektoren

Die Vektoren genügen der üblichen Fibonacci-Rekursion:

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$$

Die Figur zeigt die Vektoren $f_0, \dots, f_4$.



Vektoren

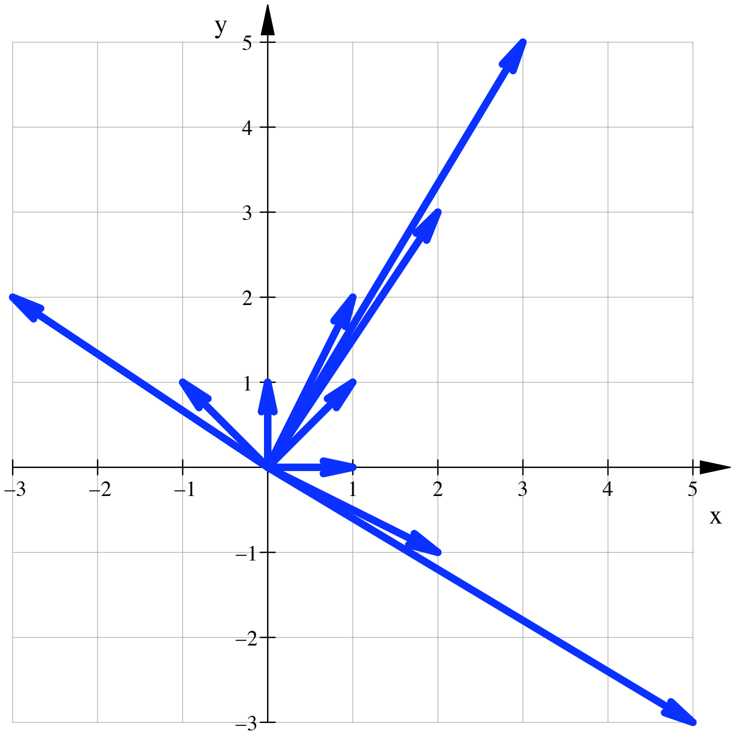
Die Vektoren werden zwar immer länger, konvergieren aber gegen eine Grenzrichtung.

Da die Matrix Q regulär ist, funktioniert die Folge auch für negative Indizes. Als Beispiele $f_{-8}, \ldots, f_0$:

$$\begin{pmatrix} -21 \\ 13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 13 \\ -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Negative Indizes

Die folgende Figur zeigt die Vektoren $f_{-5}, \ldots, f_4$:



Vektoren auch mit negativen Indizes

Die beiden Vektoren f_n und $f_{-(n+1)}$ sind gleich lang und orthogonal. Der Zwischenwinkel ist alternieren $\pm\frac{\pi}{2}$.

Die Matrix q hat folgende Eigenwerte und Eigenvektoren:

$$\lambda_1 = \tfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \tau \qquad \lambda_2 = \tfrac{1-\sqrt{5}}{2} = -\rho$$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \tau \end{pmatrix} \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\rho \end{pmatrix}$$

Hier erscheint der goldene Schnitt.

Wir normieren die Vektoren f_n so, dass der obere Eintrag eine 1 wird. Beispiel:

$$f_5 = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad g_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{8}{5} \end{pmatrix}$$

Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} g_n = u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \tau \end{pmatrix} \qquad \lim_{n\to-\infty} g_n = u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\rho \end{pmatrix}$$

Die Vektoren f_n nähern sich also steigungsmäßig den Eigenvektoren, werden aber beliebig lang.

1.2 Beispiel

Wir verwenden die gleiche Matrix Q, aber den Startvektor:

$$f_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 \\ 18 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 18 \\ 29 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 29 \\ 47 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 47 \\ 76 \end{pmatrix}$$

Anderer Startvektor

Es handelt sich hier um die Lucas-Zahlen, welche dieselbe Rekursion haben wie die Fibonacci-Zahlen. Die Rekursionsformel steckt offenbar in der Matrix Q. Die beiden Startwerte packen wir in den Startvektor.

2 Allgemein

Wir verwenden die Matrix (der Faktor 2 im Element rechts unten hat nur ästhetische Bedeutung, die Formeln werden dann einfacher)

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & 2p \end{pmatrix}$$

und den Startvektor:

$$f_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

Damit bilden wir die geometrische Vektorfolge:

$$f_n = Q^n f_0$$

Zum Vergleich verwenden wir die Rekursionsformel

$$a_{n+2} = 2pa_{n+1} + qa_n$$

und die Startwerte a_0 und a_1.

Dann gilt:

$$f_n = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$$

Beweis induktiv: Zunächst ist:

$$f_1 = Q f_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & 2p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 2pa_1 + qa_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Induktionsschritt:

$$f_{n+1} = Q^{n+1} f_0 = QQ^n f_0 = Q f_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & 2p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ 2pa_{n+1} + qa_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix}$$

3 Link mit der Formel von Binet

Eine Folge mit der Rekursion $a_{n+2} = 2pa_{n+1} + qa_n$ und den Startwerten a_0 und a_1 kann explizit dargestellt werden durch:

$$a_n = \tfrac{1}{\gamma_1 - \gamma_2}\left(\left(a_1 - a_0\gamma_2\right)\gamma_1^n + \left(a_0\gamma_1 - a_1\right)\gamma_2^n \right)$$

Dabei ist:

$$\gamma_1 = p + \left(p^2 + q\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{und} \quad \gamma_2 = p - \left(p^2 + q\right)^{\frac{1}{2}}$$

Beweis induktiv mit einiger Rechnung.

Wir haben also, ohne die Verwendung der Matrix Q, eine Linearkombination von *zwei* geometrischen Folgen mit den Basen γ_1 und γ_2. Diese Basen sind aber genau die Eigenwerte der Matrix Q.