

Hans Walser, [20051023a], [20150111]

Räumliches Gelenkmodell

Anregung: K. E., D.

1 Aneinanderheften von Rechtecken

Wir heften schrittweise sechs kongruente Rechtecke in den Farben blau, rot, gelb, blau, rot, gelb mit Scharnieren aneinander gemäß Figur.



Aneinanderheften von Rechtecken

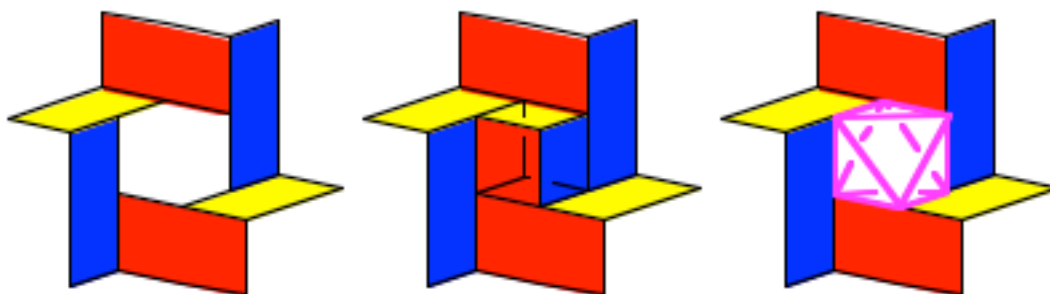
Das geht zunächst problemlos, aber nach vier Schritten schließt sich die ebene Figur. Das fünfte und das sechste Rechteck muss über das erste beziehungsweise zweite Rechteck gelegt werden. Wenn wir jetzt das sechste Rechteck an das erste anheften wollen, spreizt sich die Konfiguration in den Raum.

Dabei gibt es zwei Möglichkeiten, eine stabile und eine bewegliche.

2 Stabile Situation



Stabile Situation



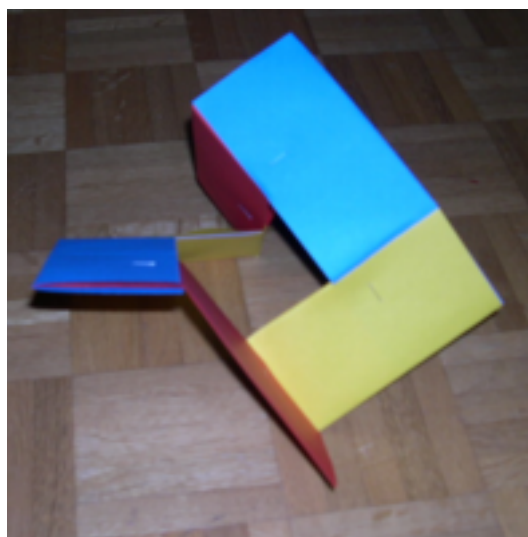
Überlegungsfigur

In der stabilen Situation haben wir an den Scharnieren abwechslungsweise rechte Winkel nach oben und nach unten. Die Ebenen gleicher Farbe sind parallel.

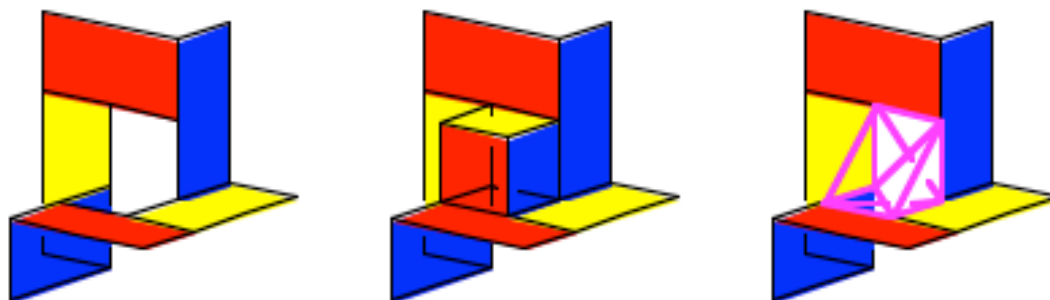
Wir können genau einen Würfel einpassen. Die Rechtecke laufen längs des Umrisssechsecks des Würfels.

Die eingezeichneten lila Strecken haben trotz der Scharniere konstante Längen. Sie sind die Kanten eines (nicht regelmäßigen) Oktaeders. Das erklärt die Stabilität der Konfiguration.

3 Bewegliche Konfiguration



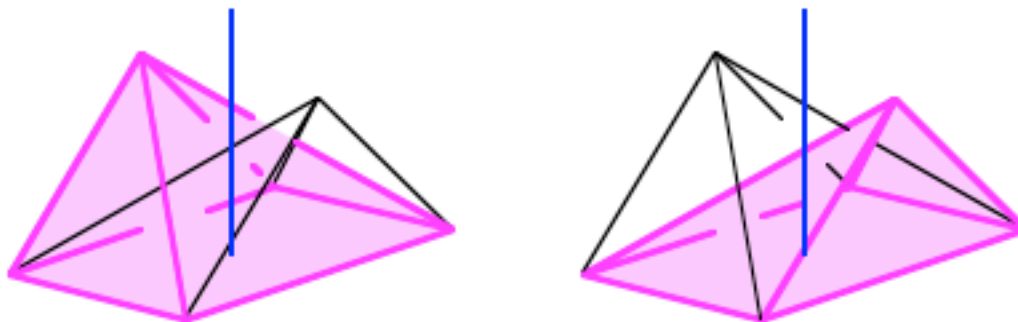
Bewegliche Konfiguration. Grundstellung und bewegte Situation



Überlegungsfigur

Die Rechtecke sind weniger regelmäßig angeordnet. Die beiden roten Rechtecke und die beiden gelben Rechtecke liegen nicht mehr in parallelen Ebenen.

Wir können zwar wieder einen Würfel einpassen, aber dieser liegt weniger „mittig“ in der Konfiguration. Die lila Strecken konstanter Länge definieren keine stabile Figur. Dabei ist zu beachten, dass die lila „Diagonalen“ nur virtuell sind und sich daher problemlos gegenseitig durchdringen können. Es ist aber keineswegs trivial, dass die Figur der zwölf lila Kanten konstanter Länge mit gelenkigen Eckverbindungen beweglich ist. Wir haben auf der Basis eines Rechteckes (mit dem Seitenverhältnis 1 zu $\sqrt{2}$) zwei verschiedene Vierseit-Pyramiden.



Die beiden Pyramiden

Diese beiden Pyramiden liegen (unter anderem) räumlich achsensymmetrisch zu einander. Die Symmetrieachse ist die gemeinsame Normale der beiden Diagonalen des Bodenrechteckes. Bei einer solchen Bewegung bleibt das Bodenviereck nicht mehr ein ebenes Rechteck. Die Diagonalen werden windschief. Eine Bewegung der einen Pyramide kann durch eine achsensymmetrische Bewegung der anderen Pyramide aufgefangen werden. Beim Oktaeder des stabilen Falles sind die beiden Pyramiden auf verschiedenen Seiten der Grundfläche, was eine Bewegung verunmöglicht.

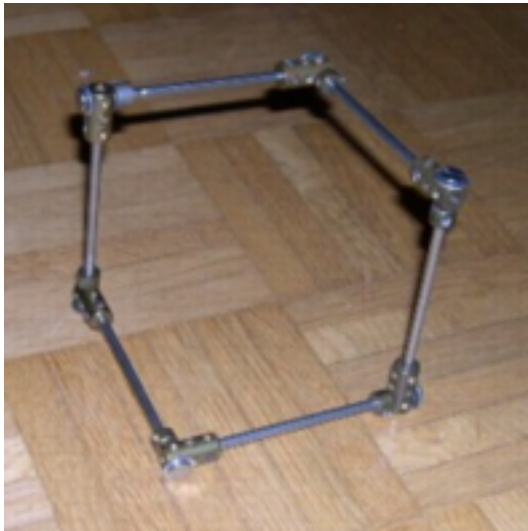
Wir können nun in der beweglichen Konfiguration ein blaues Rechteck festhalten und mit dem anderen eine achterförmige Schaukelbewegung durchführen.

Die stabile und die labile Situation können nicht in einander übergeführt werden.

4 Mechanische Realisation

Dieses Gelenkmodell kann auch mit wenig Aufwand mechanisch konstruiert werden. Am besten eignen sich dazu Bauteile eines alten Meccano Baukastens, der sich auf dem Dachboden befindet. Dieses Modell ist die *Bricardsche Sechsgelenkkette* oder der *sechsgliedrige Gelenkring nach Paul Schatz*.

Das folgende Bild zeigt links die stabile Situation. Die Figur kann problemlos zu einem Würfel ergänzt werden.



Stabile Situation und bewegliche Konfiguration

Durch Öffnen eines Gelenkes, Umstecken und wieder Schließen ergibt sich die bewegliche Konfiguration (rechts). In der Grundstellung kann ebenfalls ein Würfel hineingedacht werden.

Die folgenden zwei Bilder zeigen eine aus einer Bewegung hervorgegangene Situation in zwei verschiedenen Ansichten.



Nach einer Bewegung

5 Verallgemeinerung

Wir können unsere sechs Rechtecke durch Parallelogramme ersetzen. Auch dann gibt es eine stabile und eine bewegliche Situation. Anstelle eines Würfels kann in der stabilen Situation ein Rhomboeder, also ein von sechs kongruenten Rhomben berandeter Körper, eingesetzt werden. In der beweglichen Situation sehe ich nicht durch.