Hans Walser, [20141203a]

Funktionenfolge

1 Worum geht es?

Es wird eine Funktionenfolge besprochen, die mit dem Goldenen Schnitt zu tun hat.

2 Die Folge der Funktionen

Zu $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die Funktion:

$$f_n(x) = x^n - x^{n-2} - x^{n-3} - \cdots - 1 = x^n - \sum_{k=0}^{n-2} x^k$$

Die Abbildung 1 zeigt die Funktionsgrafen für $n \in \{1, 2, \ldots, 10\}$. Für gerade n sind die Funktionsgrafen rot, für ungerade n blau gezeichnet.

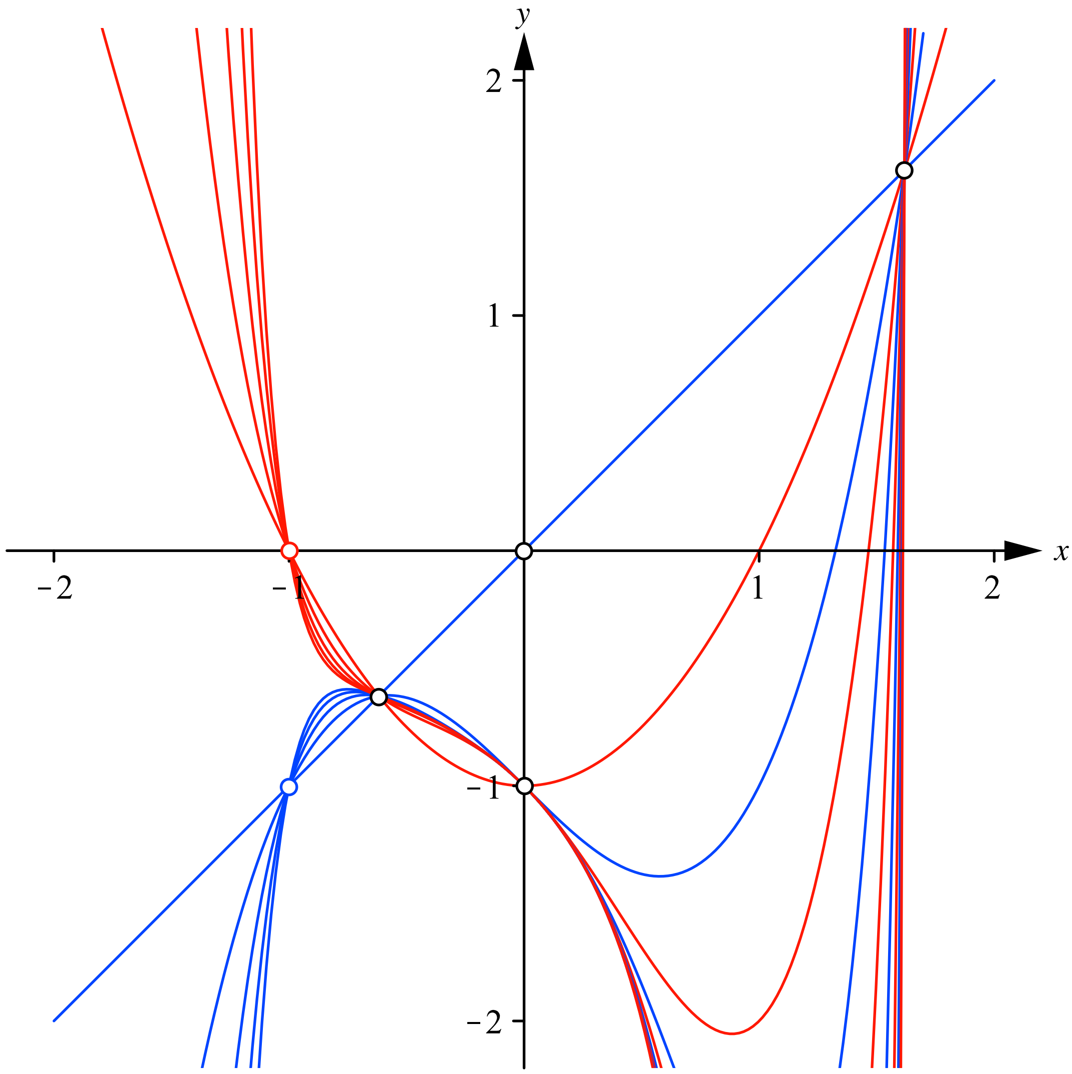

Abb. 1: Funktionsgrafen

3 Gemeinsame Punkte

Für ungerades n haben alle Funktionen eine Nullstelle bei $x=-1$. Dies folgt unmittelbar aus der Definition der Funktionenfolge.

Für gerades n verlaufen alle Funktionsgrafen durch $(-1,-1)$. Auch diese folgt unmittelbar aus der Definition der Funktionenfolge.

Für alle $n>1$ verlaufen die Funktionsgrafen durch $(0,-1)$. Ebenfalls trivial.

Und nun wird es spannend. Mit der Bezeichnung $\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1.618$ (Goldener Schnitt) verlaufen alle Funktionsgrafen durch $\left(-\frac{1}{\Phi},-\frac{1}{\Phi}\right)$ und (Φ,Φ). Für den Beweis verwenden wir die Relation $\Phi-\frac{1}{\Phi}=1$. Es ist dann:

$$\begin{aligned}f_n\left(-\tfrac{1}{\Phi}\right)&=\left(-\tfrac{1}{\Phi}\right)^n-\sum_{k=0}^{n-2}\left(-\tfrac{1}{\Phi}\right)k=\left(-\tfrac{1}{\Phi}\right)^n-\frac{\left(-\frac{1}{\Phi}\right)^{n-1}-1}{\left(-\frac{1}{\Phi}\right)-1}\\&=\left(-\tfrac{1}{\Phi}\right)^n-\frac{\left(-\frac{1}{\Phi}\right)^{n-1}-1}{-\Phi}=\left(-\tfrac{1}{\Phi}\right)^n-\left(-\tfrac{1}{\Phi}\right)^n-\tfrac{1}{\Phi}=-\tfrac{1}{\Phi}\end{aligned}$$

Analog ist:

$$f_n(\Phi)=\Phi^n-\sum_{k=0}^{n-2}\Phi^k=\Phi^n-\frac{\Phi^{n-1}-1}{\Phi-1}=\Phi^n-\frac{\Phi^{n-1}-1}{\frac{1}{\Phi}}=\Phi^n-\Phi^n-\Phi=\Phi$$

4 Nullstellen

Für gerade n haben wir die Nullstelle -1 sowie eine zweite, positive Nullstelle im Intervall $(0,\Phi)$. Für ungerade n haben wir eine einzige Nullstelle, diese liegt im Intervall $[0,\Phi)$. Die Tabelle 1 zeigt die Nullstellen in Abhängigkeit von n.

n	Nullstelle	n	Nullstelle	n	Nullstelle
1	0.	17	1.617830929	33	1.618033897
2	1.	18	1.617908582	34	1.618033932
3	1.324717957	19	1.617956520	35	1.618033954
4	1.465571232	20	1.617986125	36	1.618033967
5	1.534157745	21	1.618004414	37	1.618033975
6	1.570147312	22	1.618015713	38	1.618033980
7	1.590005374	23	1.618022695	39	1.618033984
8	1.601347334	24	1.618027009	40	1.618033986
9	1.607982728	25	1.618029675	41	1.618033987
10	1.611930397	26	1.618031323	42	1.618033988
11	1.614306823	27	1.618032341	43	1.618033988
12	1.615749203	28	1.618032970	44	1.618033988
13	1.616629684	29	1.618033359	45	1.618033988
14	1.617169296	30	1.618033600	46	1.618033989
15	1.617500905	31	1.618033748	47	1.618033989
16	1.617705070	32	1.618033840	48	1.618033989

Tab. 1: Nichtnegative Nullstelle

Die Nullstellen streben gegen den Goldenen Schnitt Φ. Eigentlich ist das schon aus der Abbildung 1 klar.

Beweisskizze: Wir haben die Gleichung

$$x^n - \sum_{k=0}^{n-2} x^k = 0$$

zu lösen. Für $x > 1$ kann dies umgeformt werden zu:

$$x^n - \tfrac{x^{n-1}-1}{x-1} = 0$$

$$x^n(x-1) - x^{n-1} + 1 = 0$$

$$x^{n+1} - x^n - x^{n-1} + 1 = 0$$

$$x^2 - x - 1 + \tfrac{1}{x^{n-1}} = 0$$

Für $n \to \infty$ verschwindet der Störterm $\tfrac{1}{x^{n-1}}$ und es bleibt die quadratische Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$ mit der Lösung Φ übrig.

5 Rekursive Definition

Die Funktionenfolge kann rekursiv definiert werden:

$$f_1(x) = x$$
$$f_{n+1}(x) = x f_n(x) - 1$$

Damit lassen sich die gemeinsamen Punkte (Abschnitt 3) ebenfalls nachweisen.

6 Ein Kreis

Vier der in Abschnitt 3 beschriebenen Punkte liegen auf einem Kreis (Abb. 2). Dieser hat den Mittelpunkt $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ und den Radius $\sqrt{\frac{5}{2}} \approx 1.581$.

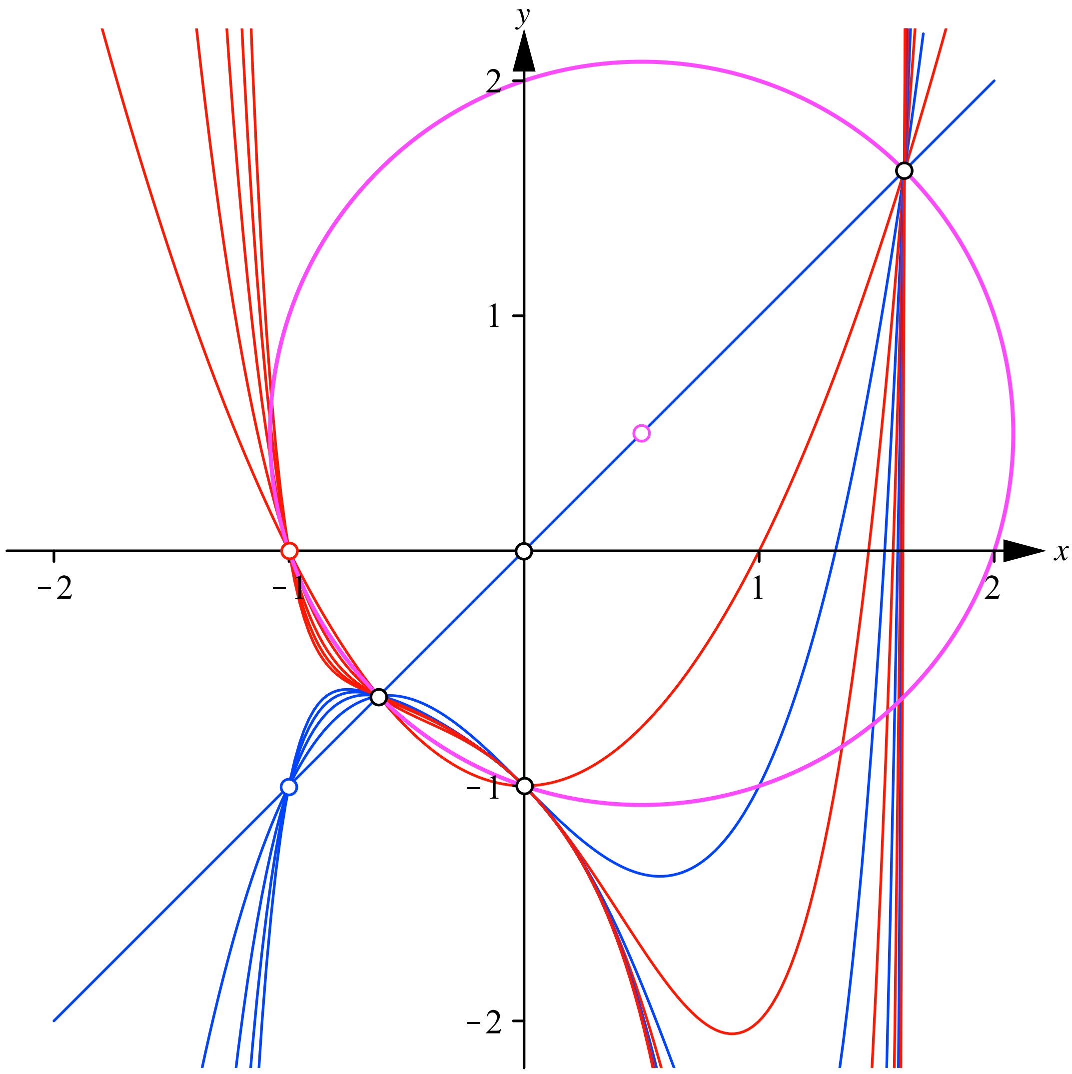

Abb. 2: Kreis