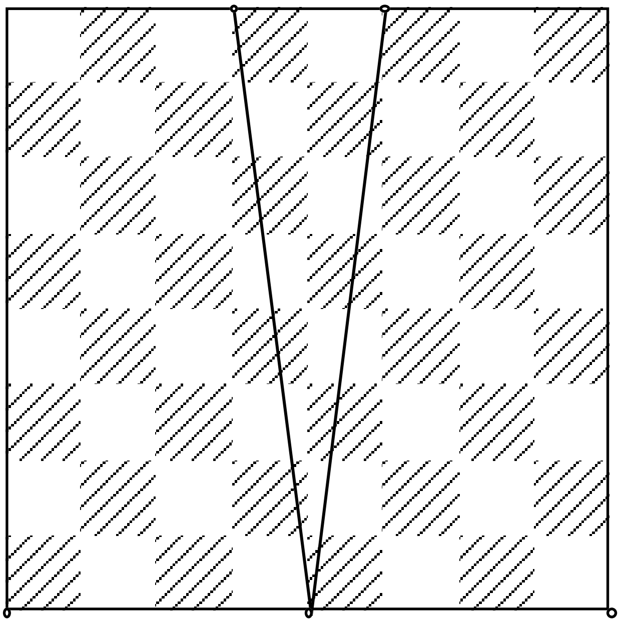
Hans Walser, [20090207a]

Folgen im Schachbrett

1 Harmonische Folgen

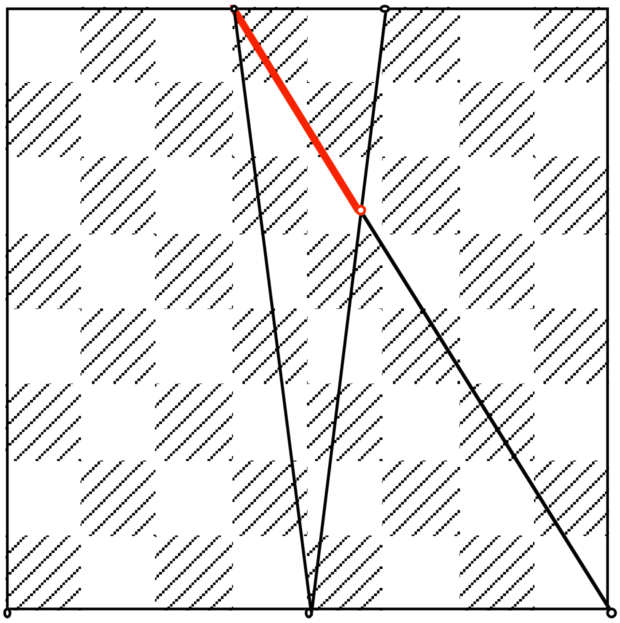
1.1 Konstruktion

Wir beginnen mit Gitterpunkten im Schachbrett und zeichnen eine Zickzack-Linie, deren Ecken zu harmonischen Folgen führen.



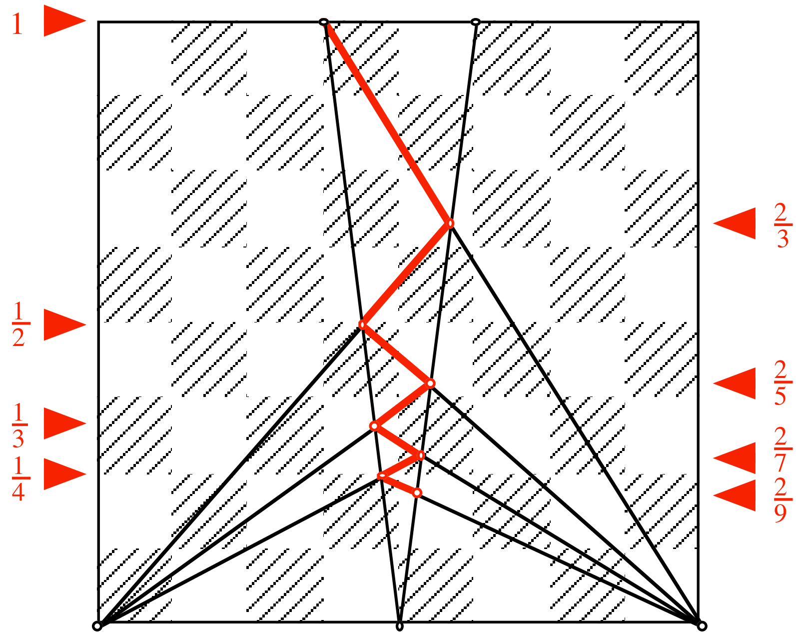
Start

Die folgende Figur zeigt den ersten Schritt der Konstruktion der Zickzack-Linie.



Erster Schritt

Nun folgen weitere Schritte. An den Rändern sind die relativen Höhen der Eckpunkte der Zickzack-Linie im Vergleich zur Seitenlänge des Schachbrettes vermerkt. Diese Höhen lassen sich mit einem geeigneten Koordinatensystem berechnen.



Weitere Schritte

Am linken Rand erkennen wir die klassische harmonische Folge $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\} = \left\{\frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N}\right\}$. Der Beweis lässt sich induktiv führen.

Was hat es mit den Zahlen am rechten Rand auf sich?

1.2 Das harmonische Mittel

Unter dem harmonischen Mittel h zweier Zahlen a und b verstehen wir:

$$m = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

Beispiel: Ein Autorennfahrer fährt die erste Runde (der Länge s) mit der Geschwindigkeit v_1 und die zweite Runde mit der Geschwindigkeit v_2. Wie groß ist die Durchschnittsgeschwindigkeit in diesen ersten beiden Runden zusammen?

Bearbeitung: Für die erste Runde ist ein Zeitaufwand $t_1 = \frac{s}{v_1}$ erforderlich, entsprechend für die zweite Runde $t_2 = \frac{s}{v_2}$. Die Durchschnittsgeschwindigkeit v_h ist also:

$$v_h = \frac{2s}{t_1 + t_2} = \frac{2s}{\frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2}} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}}$$

Wir erhalten das harmonische Mittel der beiden einzelnen Geschwindigkeiten. Die Länge s des Rennringes spielt keine Rolle.

1.3 Harmonische Folgen

In der klassischen harmonischen Folge $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\} = \left\{\frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N}\right\}$ ist jedes Folgenglied das harmonische Mittel der beiden Nachbarglieder. Wir reden nun allgemein von einer harmonischen Folge $\{a_n\}$, wenn $a_{n+1} = \frac{2}{\frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+2}}}$. Unter diesem Aspekt bilden auch die Zahlen $\left\{\frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \frac{2}{9}, \ldots\right\} = \left\{\frac{2}{2n+1} \middle| n \in \mathbb{N}\right\}$ am rechten Rand eine harmonische Folge, ebenso die Folge, dies sich aus der Vereinigung der beiden Folgen ergibt:

$$\left\{1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{1}{3}, \frac{2}{7}, \frac{1}{4}, \frac{2}{8}, \ldots\right\} = \left\{\frac{2}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{2}{5}, \frac{2}{6}, \frac{2}{7}, \frac{2}{8}, \frac{2}{8}, \ldots\right\} = \left\{\frac{2}{n} \middle| n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\right\}$$

Aus der Definitionsbedingung $a_{n+1} = \frac{2}{\frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+2}}}$ ergibt sich die Rekursionsformel:

$$a_{n+2} = \frac{1}{\frac{2}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}}$$

Wegen dem Minuszeichen im Nenner kann es zu einer Division durch Null kommen. Bei den Startwerten $a_1 = 1$ und $a_2 = 2$ etwa muss man mit Gefühl arbeiten:

n	1	2	3	4	5	6
a_n	1	2	∞	-2	-1	$-\frac{3}{2}$

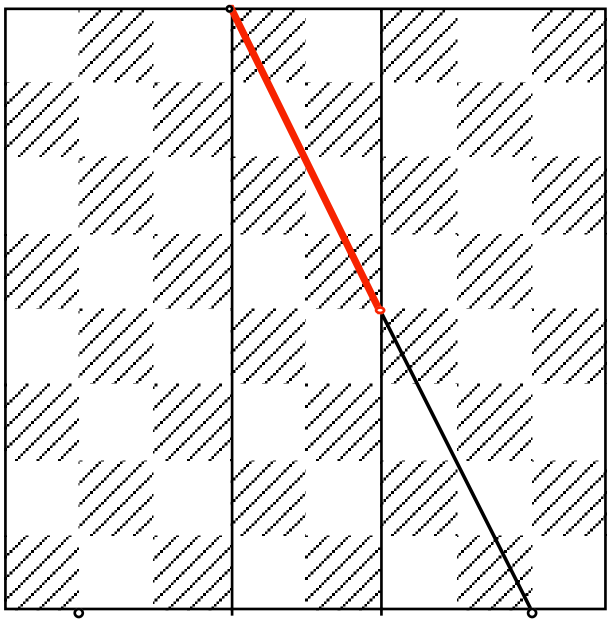
Bei den Startwerten $a_1 = 1$ und $a_2 = 3$ tritt der Pol nicht auf:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_n	1	3	-3	-1	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{7}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{3}{11}$	$-\frac{3}{13}$

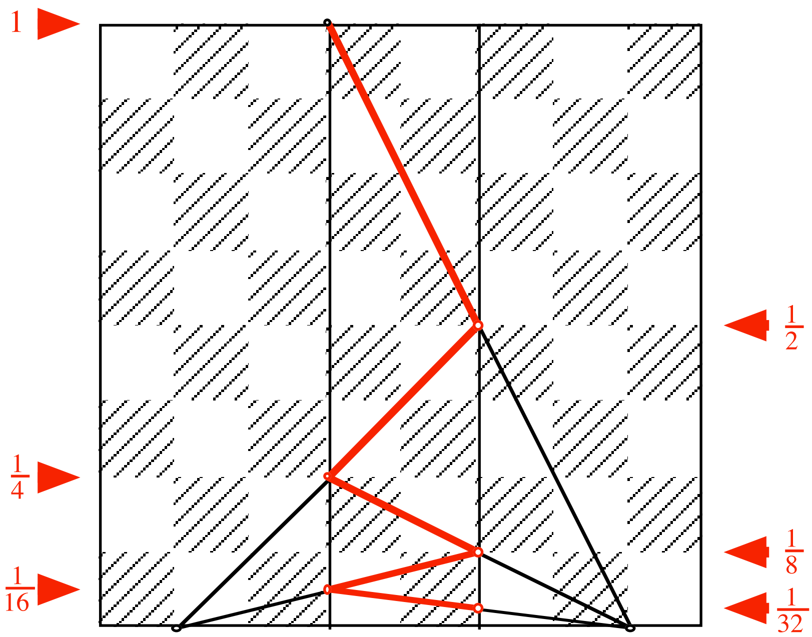
2 Geometrische Folgen

2.1 Konstruktion

Wir beginnen mit Gitterpunkten im Schachbrett und zeichnen eine Zickzack-Linie, deren Ecken zu geometrischen Folgen führen.



Erster Schritt



Weitere Schritte

Es entsteht eine geometrische Folge. Der Beweis ergibt sich aus den Strahlensätzen.