

Hans Walser, [20160623]

## Folgen

### 1 Worum es geht

Wir bearbeiten Folgen  $a_n$  mit dem Startwert  $a_0$  und der Rekursion:

$$a_{n+1} = qa_n + d \quad (1)$$

Es handelt sich also um eine Mischform von geometrischer und arithmetischer Folge.

### 2 Explizite Form

Es ist:

$$\begin{aligned} a_0 &= a_0 = a_0 \\ a_1 &= qa_0 + d = qa_0 + d \\ a_2 &= q(qa_0 + d) + d = q^2a_0 + qd + d \\ a_3 &= q(q(qa_0 + d) + d) + d = q^3a_0 + q^2d + qd + d \\ a_4 &= q(q(q(qa_0 + d) + d) + d) + d = q^4a_0 + q^3d + q^2d + qd + d \\ a_5 &= q(q(q(q(qa_0 + d) + d) + d) + d) + d = q^5a_0 + q^4d + q^3d + q^2d + qd + d \end{aligned} \quad (2)$$

Allgemein ist für  $q \neq 1$ :

$$a_n = a_0q^n + d \sum_{k=0}^{n-1} q^k = a_0q^n + d \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad (3)$$

Durch Umformen ergibt sich:

$$a_n = q^n \left( a_0 + \frac{d}{q-1} \right) - \frac{d}{q-1} \quad (4)$$

Es handelt sich also im Wesentlichen um eine geometrische Folge.

### 3 Summenfolge

Wir berechnen die Summenfolge  $s_n$ :

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k \quad (5)$$

Es ist:

$$\begin{aligned}
 s_0 &= a_0 \\
 s_1 &= a_0 + qa_0 + d \\
 s_2 &= a_0 + qa_0 + q^2a_0 + 2d + qd \\
 s_3 &= a_0 + qa_0 + q^2a_0 + q^3a_0 + 3d + 2qd + q^2d \\
 s_4 &= a_0 + qa_0 + q^2a_0 + q^3a_0 + q^4a_0 + 4d + 3qd + 2q^2d + q^3d \\
 s_5 &= a_0 + qa_0 + q^2a_0 + q^3a_0 + q^4a_0 + q^5a_0 + 5d + 4qd + 3q^2d + 2q^3d + q^4d
 \end{aligned} \tag{6}$$

Allgemein:

$$s_n = a_0 \sum_{k=0}^n q^k + d \sum_{k=0}^n (n-k)q^k \tag{7}$$

Umformen ergibt:

$$\begin{aligned}
 s_n &= (a_0 + dn) \sum_{k=0}^n q^k - dq \sum_{k=0}^n kq^{k-1} \\
 &= (a_0 + dn) \frac{q^{n+1} - 1}{q-1} - d \frac{nq^{n+2} - (n+1)q^{n+1} + q}{(q-1)^2}
 \end{aligned} \tag{8}$$

#### 4 Numerische Beispiele

Für  $a_0 = 1, f = 2$  und  $d = 1$  ergeben sich die Werte der Tabelle 1.

$n$	$a_n$	$s_n$
0	1	1
1	3	4
2	7	11
3	15	26
4	31	57
5	63	120

**Tab. 1**

Für  $a_0 = 1, f = 2$  und  $d = 0$  ergeben sich die Werte der Tabelle 2.

$n$	$a_n$	$s_n$
0	1	1
1	2	3
2	4	7
3	8	15
4	16	31
5	32	63

**Tab. 2**

Für  $a_0 = 1, f = 1$  und  $d = 1$  ergeben sich die Werte der Tabelle 3.

$n$	$a_n$	$s_n$
0	1	1
1	2	3
2	3	6
3	4	10
4	5	15
5	6	21

**Tab. 3**

Für  $a_0 = 1, f = 0.9$  und  $d = 0.1$  ergeben sich die Werte der Tabelle 4. Die Folge  $a_n$  ist konstant.

$n$	$a_n$	$s_n$
0	1	1
1	1.0	2.0
2	1.00	3.00
3	1.000	4.000
4	1.0000	5.0000
5	1.00000	6.00000

**Tab. 4**

Für  $a_0 = 1, f = 9/10$  und  $d = 1/10$  ergeben sich die Werte der Tabelle 5. Die Folge  $a_n$  ist konstant. Der Unterschied zu den Werten der Tabelle 4 ergibt sich durch eine unterschiedliche Rechenart (Brüche statt Dezimalzahlen)

$n$	$a_n$	$s_n$
0	1	1
1	1	2
2	1	3
3	1	4
4	1	5
5	1	6

Tab. 5

Bei anderen Startwerten steigt oder fällt die Folge.

Für  $a_0 = 0.5, f = 0.9$  und  $d = 0.1$  ergeben sich die Werte der Tabelle 6. Die Folge  $a_n$  steigt, hat aber die Obergrenze 1.

$n$	$a_n$	$s_n$
0	0.5	0.5
1	0.55	1.05
2	0.595	1.645
3	0.6355	2.2805
4	0.67195	2.95245
5	0.704755	3.657205

Tab. 6

Für  $a_0 = 1.5, f = 0.9$  und  $d = 0.1$  ergeben sich die Werte der Tabelle 7. Die Folge  $a_n$  fällt, hat aber die Untergrenze 1.

$n$	$a_n$	$s_n$
0	1.5	1.5
1	1.45	2.95
2	1.405	4.355
3	1.3645	5.7195
4	1.32805	7.04755
5	1.295245	8.342795

Tab. 7