Hans Walser, [20160623]

Folgen

1 Worum es geht

Wir bearbeiten Folgen a_n mit dem Startwert a_0 und der Rekursion:

$$a_{n+1} = qa_n + d \tag{1}$$

Es handelt sich also um eine Mischform von geometrischer und arithmetischer Folge.

2 Explizite Form

Es ist:

$$\begin{aligned}
a_0 &= a_0 = a_0 \\
a_1 &= qa_0 + d = qa_0 + d \\
a_2 &= q(qa_0 + d) + d = q^2 a_0 + qd + d \\
a_3 &= q(q(qa_0 + d) + d) + d = q^3 a_0 + q^2 d + qd + d \\
a_4 &= q(q(q(qa_0 + d) + d) + d) + d = q^4 a_0 + q^3 d + q^2 d + qd + d \\
a_5 &= q(q(q(q(qa_0 + d) + d) + d) + d) + d = q^5 a_0 + q^4 d + q^3 d + q^2 d + qd + d
\end{aligned} \tag{2}$$

Allgemein ist für $q \neq 1$:

$$a_n = a_0 q^n + d \sum_{k=0}^{n-1} q^k = a_0 q^n + d \tfrac{q^n - 1}{q-1} \tag{3}$$

Durch Umformen ergibt sich:

$$a_n = q^n \left(a_0 + \tfrac{d}{q-1} \right) - \tfrac{d}{q-1} \tag{4}$$

Es handelt sich also im Wesentlichen um eine geometrische Folge.

3 Summenfolge

Wir berechnen die Summenfolge s_n:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \tag{5}$$

Es ist:

$$
\begin{aligned}
s_0 &= a_0 \\
s_1 &= a_0 + qa_0 + d \\
s_2 &= a_0 + qa_0 + q^2 a_0 + 2d + qd \\
s_3 &= a_0 + qa_0 + q^2 a_0 + q^3 a_0 + 3d + 2qd + q^2 d \\
s_4 &= a_0 + qa_0 + q^2 a_0 + q^3 a_0 + q^4 a_0 + 4d + 3qd + 2q^2 d + q^3 d \\
s_5 &= a_0 + qa_0 + q^2 a_0 + q^3 a_0 + q^4 a_0 + q^5 a_0 + 5d + 4qd + 3q^2 d + 2q^3 d + q^4 d
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Allgemein:

$$
s_n = a_0 \sum_{k=0}^{n} q^k + d \sum_{k=0}^{n} (n-k) q^k \tag{7}
$$

Umformen ergibt:

$$
\begin{aligned}
s_n &= (a_0 + dn) \sum_{k=0}^{n} q^k - dq \sum_{k=0}^{n} k q^{k-1} \\
&= (a_0 + dn) \frac{q^{n+1}-1}{q-1} - d \frac{nq^{n+2}-(n+1)q^{n+1}+q}{(q-1)^2}
\end{aligned}
\tag{8}
$$

4 Numerische Beispiele

Für $a_0 = 1, f = 2$ und $d = 1$ ergeben sich die Werte der Tabelle 1.

n	a_n	s_n
0	1	1
1	3	4
2	7	11
3	15	26
4	31	57
5	63	120

Tab. 1

Für $a_0 = 1, f = 2$ und $d = 0$ ergeben sich die Werte der Tabelle 2.

n	a_n	s_n
0	1	1
1	2	3
2	4	7
3	8	15
4	16	31
5	32	63

Tab. 2

Für $a_0 = 1, f = 1$ und $d = 1$ ergeben sich die Werte der Tabelle 3.

n	a_n	s_n
0	1	1
1	2	3
2	3	6
3	4	10
4	5	15
5	6	21

Tab. 3

Für $a_0 = 1, f = 0.9$ und $d = 0.1$ ergeben sich die Werte der Tabelle 4. Die Folge a_n ist konstant.

n	a_n	s_n
0	1	1
1	1.0	2.0
2	1.00	3.00
3	1.000	4.000
4	1.0000	5.0000
5	1.00000	6.00000

Tab. 4

Für $a_0 = 1, f = 9/10$ und $d = 1/10$ ergeben sich die Werte der Tabelle 5. Die Folge a_n ist konstant. Der Unterschied zu den Werten der Tabelle 4 ergibt sich durch eine unterschiedliche Rechenart (Brüche statt Dezimalzahlen)

n	a_n	s_n
0	1	1
1	1	2
2	1	3
3	1	4
4	1	5
5	1	6

Tab. 5

Bei anderen Startwerten steigt oder fällt die Folge.

Für $a_0 = 0.5, f = 0.9$ und $d = 0.1$ ergeben sich die Werte der Tabelle 6. Die Folge a_n steigt, hat aber die Obergrenze 1.

n	a_n	s_n
0	0.5	0.5
1	0.55	1.05
2	0.595	1.645
3	0.6355	2.2805
4	0.67195	2.95245
5	0.704755	3.657205

Tab. 6

Für $a_0 = 1.5, f = 0.9$ und $d = 0.1$ ergeben sich die Werte der Tabelle 7. Die Folge a_n fällt, hat aber die Untergrenze 1.

n	a_n	s_n
0	1.5	1.5
1	1.45	2.95
2	1.405	4.355
3	1.3645	5.7195
4	1.32805	7.04755
5	1.295245	8.342795

Tab. 7