Hans Walser, [20180120a]

Folge von pythagoreischen Dreiecken

1 Zahlenfolgen

Wir definieren rekursiv drei Zahlenfolgen:

$$\begin{array}{lll} a_0 = 1 & b_0 = 0 & c_0 = 1 \\ a_n = 4n - a_{n-1} & b_n = 4n + b_{n-1} & c_n = 4n + c_{n-1} \end{array} \qquad (1)$$

Man beachte das Minuszeichen in der Rekursion von a_n.

Die Tabelle 1 gibt die ersten Werte.

n	a_n	b_n	c_n
0	1	0	1
1	3	4	5
2	5	12	13
3	7	24	25
4	9	40	41
5	11	60	61
6	13	84	85
7	15	112	113
8	17	144	145
9	19	180	181
10	21	220	221

Tab. 1: Werte

Die Zahlentripel sind offenbar pythagoreische Tripel. Es werden allerdings nicht alle pythagoreischen Tripel generiert.

Die Werte a_n sind die ungeraden Zahlen.

Die Werte b_n und c_n unterscheiden sich nur um 1.

2 Explizite Formeln

Explizit ist:

$$a_n = 2n+1 \qquad b_n = 2n^2 + 2n \qquad c_{n+2n} = 2n^2 + 2n + 1 \qquad (2)$$

Nachweis induktiv.

Weiter ist:

$$\begin{aligned} a_n^2 + b_n^2 &= (2n+1)^2 + \left(2n^2+2n\right)^2 = 4n^4+8n^3+8n^2+4n+1 \\ c_n^2 &= \left(2n^2+2n+1\right)^2 = 4n^4+8n^3+8n^2+4n+1 \end{aligned} \tag{3}$$

Es handelt sich wirklich um pythagoreische Tripel.

Aus (2) geht auch die Differenz von 1 zwischen b_n und c_n hervor.

3 Illustration

Die Abbildung 1 zeigt einen Illustrationsversuch. Jedes pythagoreische Dreieck ist zwei Mal gezeichnet.

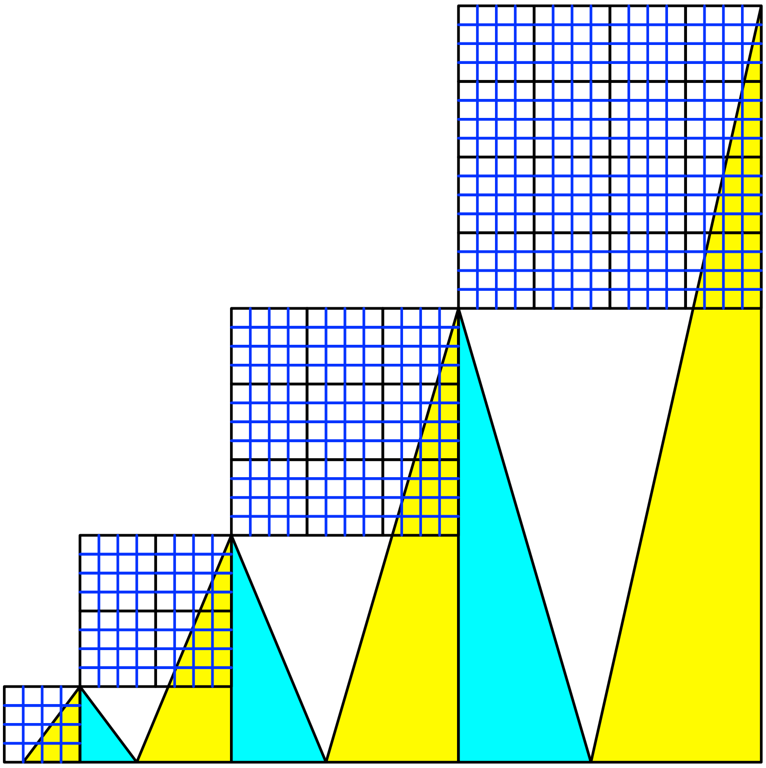

Abb. 1: Die Rekursion