Hans Walser, [20160428]

Flossen

1 Worum es geht

Nach Ansetzen von Quadraten an ein Polygon ergeben sich Zwischenfiguren (Dreiecke oder Vierecke, „Flossen“). Bei beliebigen Dreiecken, beliebigen Vierecken und punktsymmetrischen Sechsecken ergeben sich ganzzahlige Flächenverhältnisse. Die Zahlen sind mit den Fibonacci-Zahlen verwandt.

Beweise fehlen.

2 Dreieck als Basis

Einem Dreieck setzen wir Quadrate an und füllen die Zwischenräume mit roten Dreiecken (Abb. 1) (vgl. [1], [2]).

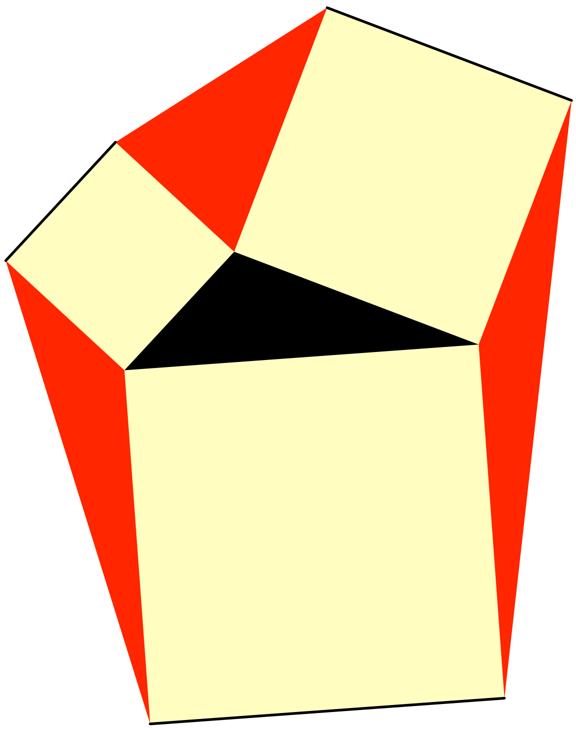

Abb. 1: Dreieck als Basis. Erste Runde

Anschließend setzen wir den roten Außenkanten Quadrate an und füllen die Zwischenräume mit roten blauen Vierecken (Abb. 2). So erhalten wir die zweite Runde.

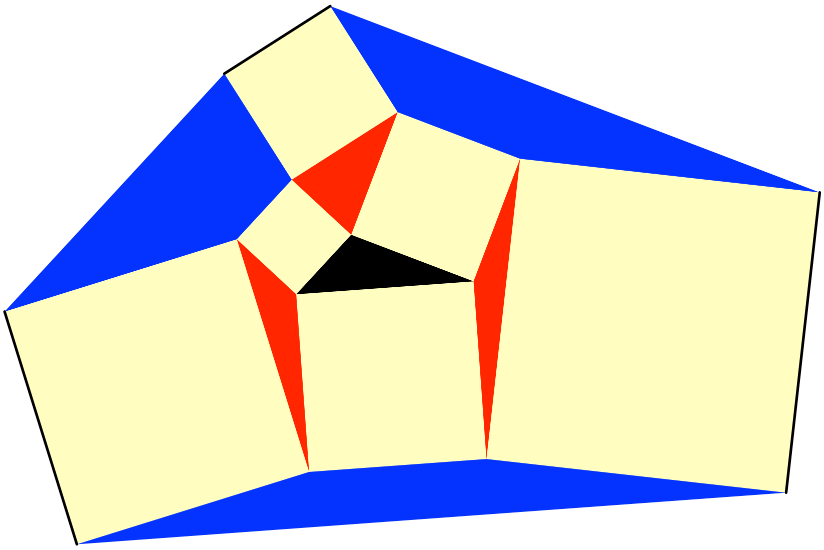

Abb. 2: Zweite Runde (blau)

Nun fahren wir entsprechend weiter und erhalten die dritte Runde (grün in Abb. 3).

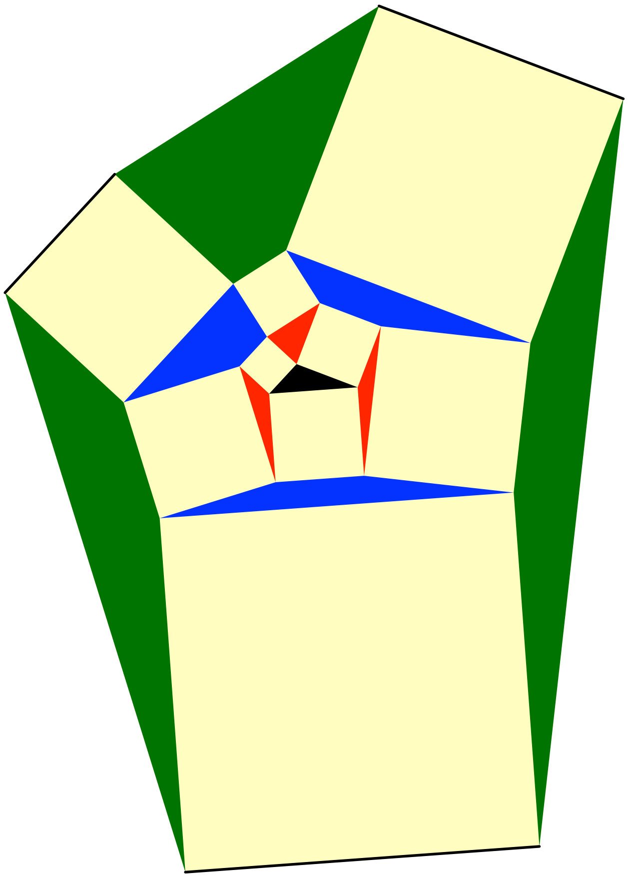

Abb. 3: Dritte Runde grün

Und noch die vierte Runde (Abb. 4).

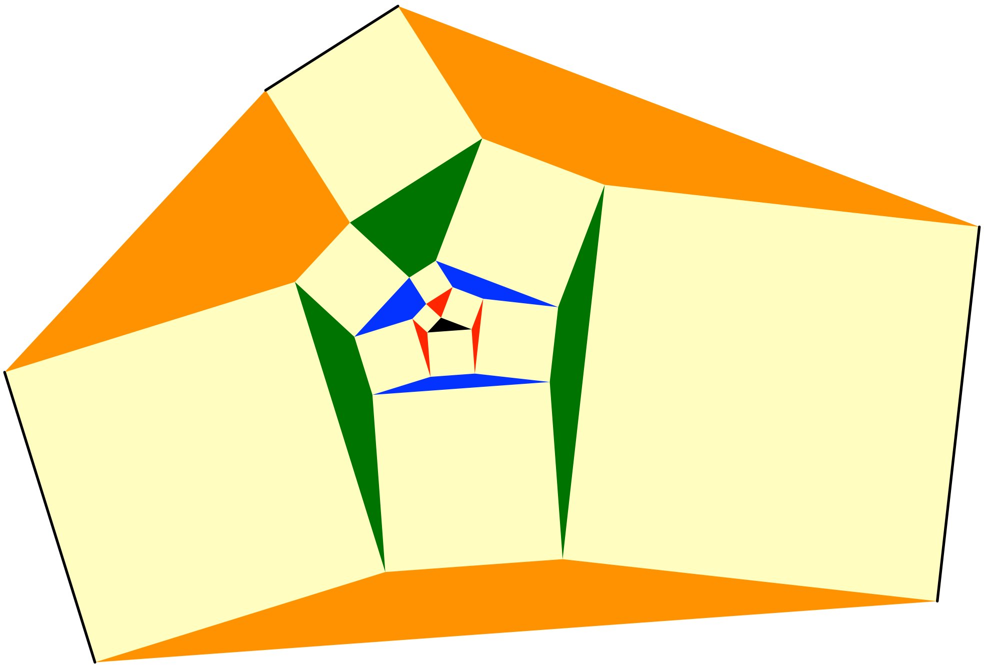

Abb. 4: Vierte Runde orange

Nun gilt folgendes.

Die Dreiecke und Vierecke gleicher Farbe sind flächenmäßig je gleich groß.

In der Tabelle 1 werden die Flächenverhältnisse der drei Figuren einer Farbe im Verhältnis zum Flächeninhalt des schwarzen Ausgangsdreieckes aufgelistet. Der Flächeninhalt des schwarzen Ausgangsdreieckes ist also die Maßeinheit für die Flächenmessung.

Nummer	1	2	3	4
Farbe	rot	blau	grün	orange
Fläche	3	15	72	345

Tab. 1: Flächenverhältnisse

Für die Folge f_n der Flächen gilt die Rekursion

$$f_{n+1} = 5 f_n - f_{n-1} \tag{1}$$

und die explizite Formel:

$$f_n = \tfrac{1}{7}\sqrt{21}\left(\left(\tfrac{5+\sqrt{21}}{2}\right)^n - \left(\tfrac{5-\sqrt{21}}{2}\right)^n\right) \tag{2}$$

Die Tabelle 2 gibt die ersten 20 Werte von f_n. Vgl. https://oeis.org/A004254 und [5]. Wegen (2) wachsen die Werte im Wesentlichen exponentiell.

n	f_n
1	3
2	15
3	72
4	345
5	1653
6	7920
7	37947
8	181815
9	871128
10	4173825

n	f_n
11	19997997
12	95816160
13	459082803
14	2199597855
15	10538906472
16	50494934505
17	241935766053
18	1159183895760
19	5553983712747
20	26610734667975

Tab. 2: Werte

Mit den Koeffizienten der Rekursionsformel (1) basteln wir ein Polynom:

$$x^2 = 5x - 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 5x + 1 = 0 \tag{3}$$

Nun machen wir eine Taylor-Entwicklung des Terms

$$\frac{f_1 x}{x^2-5x+1} = \frac{3x}{x^2-5x+1} \tag{4}$$

an der Stelle $x = 0$ und erhalten:

$$\frac{3x}{x^2-5x+1} = 3x + 15x^2 + 72x^3 + 345x^4 + 1653x^5 + 7920x^6 + 37947x^7 + \cdots \tag{5}$$

Die Koeffizienten sind die Werte unserer Folge.

3 Viereck als Basis

Die Abbildung 5 zeigt die analoge Figur mit einem beliebigen Viereck als Startfigur.

Im Unterschied zum Dreiecksfall sind die Vielecke gleicher Farbe *nicht* mehr flächengleich.

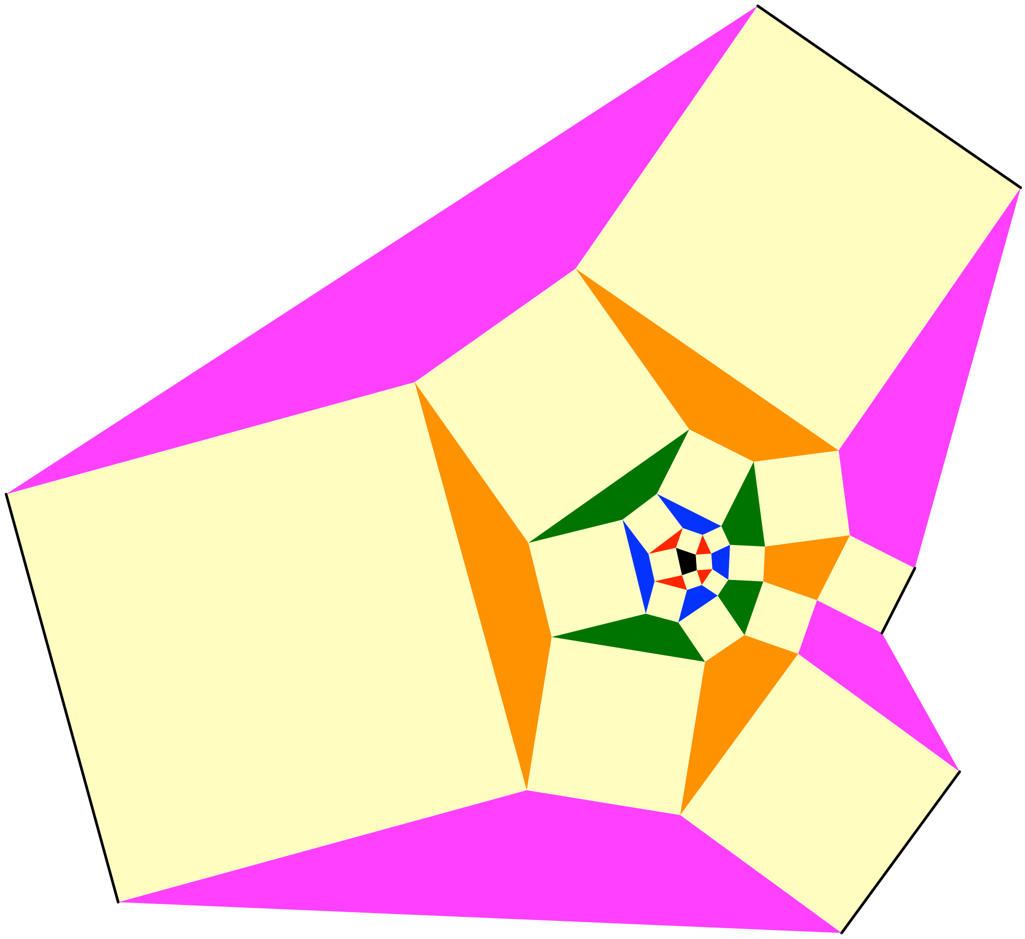

Abb. 5: Viereck als Startfigur

In der Tabelle 3 werden die Flächenverhältnisse der vier Figuren einer Farbe im Verhältnis zum Flächeninhalt des schwarzen Ausgangsviereckes aufgelistet. Der Flächeninhalt des schwarzen Ausgangsviereckes ist also die Maßeinheit für die Flächenmessung.

Nummer	1	2	3	4	5
Farbe	rot	blau	grün	orange	magenta
Fläche	2	8	30	112	418

Tab. 3: Flächenverhältnisse

Für die Folge f_n der Flächen gilt die Rekursion

$$f_{n+1} = 4f_n - f_{n-1} \tag{6}$$

und die explizite Formel:

$$f_n = \tfrac{1}{3}\sqrt{3}\left(\left(2+\sqrt{3}\right)^n - \left(2-\sqrt{3}\right)^n\right) \tag{7}$$

Die Tabelle 4 gibt die ersten 20 Werte von f_n. Vgl. https://oeis.org/A052530. Wegen (7) wachsen die Werte im Wesentlichen exponentiell.

n	f_n	n	f_n
1	2	11	1129438
2	8	12	4215120
3	30	13	15731042
4	112	14	58709048
5	418	15	219105150
6	1560	16	817711552
7	5822	17	3051741058
8	21728	18	11389252680
9	81090	19	42505269662
10	302632	20	158631825968

Tab. 4: Werte

Taylor:

$$\frac{2x}{x^2-4x+1} = 2x + 8x^2 + 30x^3 + 112x^4 + 418x^5 + 1560x^6 + 5822x^7 + \cdots \tag{8}$$

Für den Sonderfall eines Parallelogramms vergleiche [3].

4 Punktsymmetrisches Sechseck als Basis

Die Abbildung 6 zeigt die analoge Figur mit einem beliebigen punktsymmetrischen Sechseck als Startfigur (vgl. [4]).

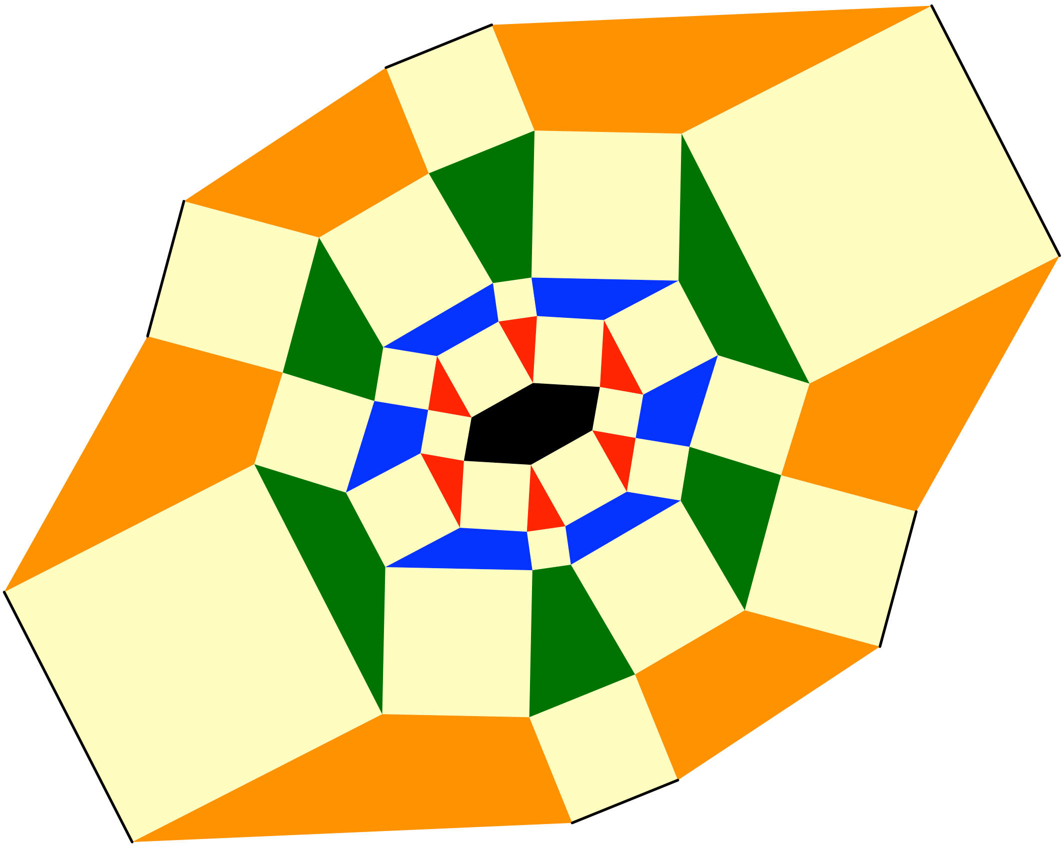

Abb. 6: Punktsymmetrisches Sechseck als Startfigur

In der Tabelle 5 werden die Flächenverhältnisse der sechs Figuren einer Farbe im Verhältnis zum Flächeninhalt des schwarzen Ausgangssechseckes aufgelistet..

Nummer	1	2	3	4
Farbe	rot	blau	grün	orange
Fläche	1	3	8	21

Tab. 5: Flächenverhältnisse

Für die Folge f_n der Flächen gilt die Rekursion

$$f_{n+1} = 3f_n - f_{n-1} \tag{9}$$

und die explizite Formel:

$$f_n = \tfrac{1}{5}\sqrt{5}\left(\left(\tfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\tfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) \tag{9}$$

Die Tabelle 4 gibt die ersten 20 Werte von f_n. Es handelt sich um jedes zweite Folgenglied der Fibonacci-Folge (Walser 2012). Wer hätte das gedacht.

n	f_n
1	1
2	3
3	8
4	21
5	55
6	144
7	377
8	987
9	2584
10	6765

n	f_n
11	17711
12	46368
13	121393
14	317811
15	832040
16	2178309
17	5702887
18	14930352
19	39088169
20	102334155

Tab. 6: Fibonacci-Auswahl

Taylor:

$$\frac{x}{x^2-3x+1} = x + 3x^2 + 8x^3 + 21x^4 + 55x^5 + 144x^6 + 377x^7 + \cdots \tag{10}$$

Literatur

Deshpande, M. N. (2009): Proof Without Words: Beyond Extriangles. MATHEMATICS MAGAZINE. Vol. 82, No. 3, June 2009, p. 208.

Walser, Hans (2012): Fibonacci. Zahlen und Figuren. Leipzig, EAGLE, Edition am Gutenbergplatz. ISBN 978-3-937219-60-8.

Websites

Abgerufen 27. April 2016

[1] http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/P/Puzzle_2/Puzzle_2.htm

[2] http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/P/Puzzle_4/Puzzle_4.htm

[3] http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/P/Puzzle/Puzzle.htm

[4] http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/P/Puzzle_3/Puzzle_3.htm

[5] https://oeis.org