Hans Walser, [20150406]

Flossen

Anregung: H. M-S., V.

1 Quadratpaar

Wir beginnen mit zwei Quadraten, welche eine Ecke gemeinsam haben, und füllen dazwischen mit Dreiecken (Flossen) aus (Abb. 1).

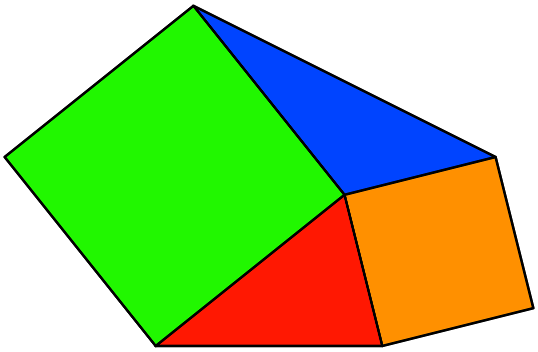

Abb. 1: Rote und blaue Flosse

Die rote und die blaue Flosse haben denselben Flächeninhalt. Dies kann durch Einbetten der Figur in ein Parkett eingesehen werden (Abb. 2). Die beiden Flossen sind je ein halbes Parallelogramm.

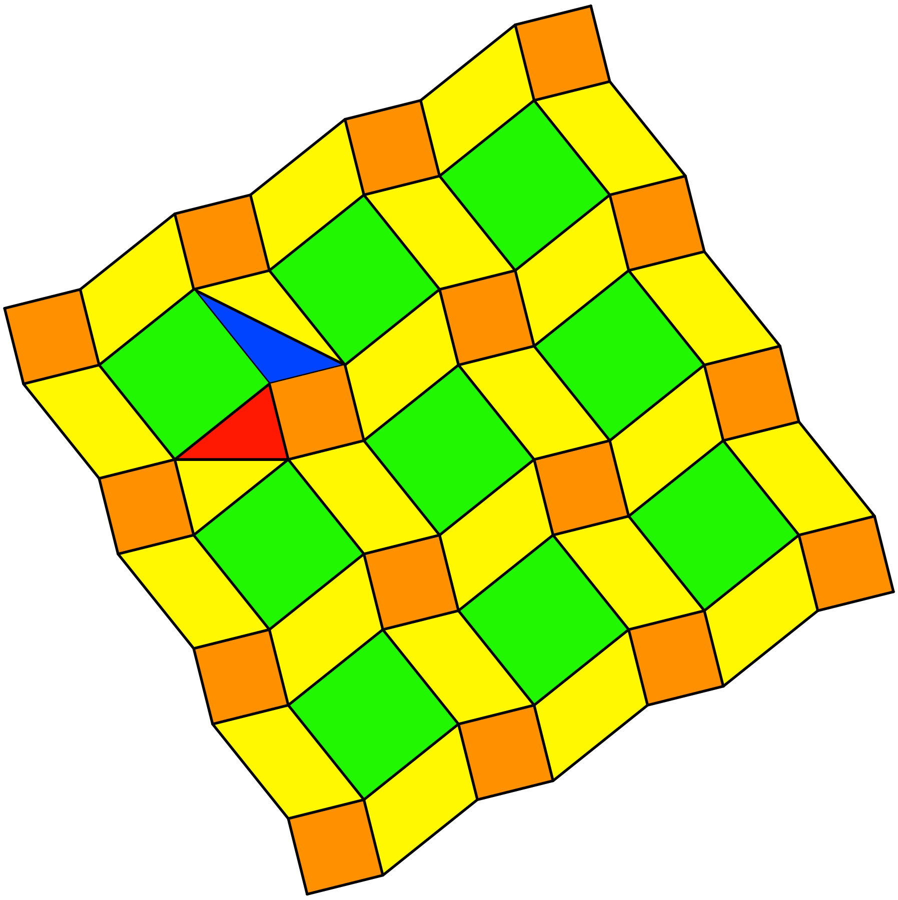

Abb. 2: Parkett

Die Höhe einer Flosse durch die gemeinsame Ecke ist auf derselben Geraden wie die Schwerlinie der anderen Flosse (Abb. 3). Dies folgt daraus, dass die Parallelogramme im Parkett der Abbildung 2 in zwei zueinander um 90° verdrehten Positionen vorkommen.

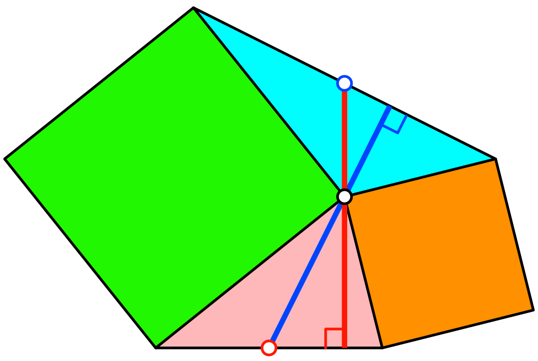

Abb. 3: Höhen und Schwerlinien

2 Flossen am Dreieck

Wir setzen einem beliebigen Dreieck Quadrate an (es handelt sich *nicht* um den Pythagoras) und füllen zwischen den Quadraten mit Flossen auf (Abb. 4).

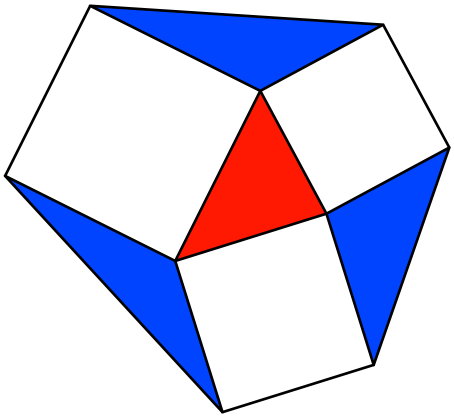

Abb. 4: Dreieck mit Flossen

Die Flossen haben nach Abschnitt 1 je denselben Flächeninhalt wie das Dreieck, sind also untereinander gleich groß. Die Flossenflächensumme ist das Dreifache der Dreiecksfläche.

3 Flossen am Viereck

Die Abbildung 5 zeigt die Situation für ein konvexes Viereck. Die einzelnen Flossen sind nicht mehr flächengleich.

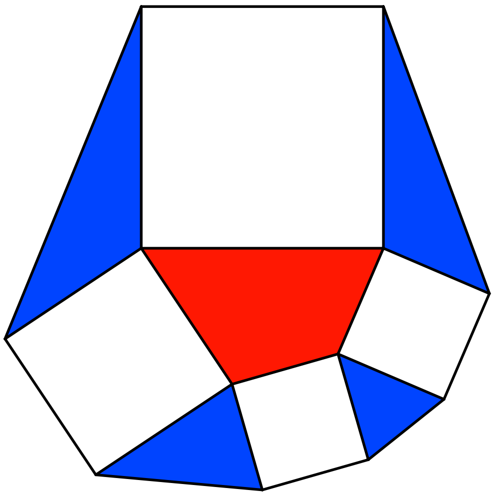

Abb. 5: Viereck mit Flossen

Hingegen sehen wir aus der Abbildung 6, dass die Flächensumme gegenüberliegender Flossen gleich groß ist wie die Viereckfläche.

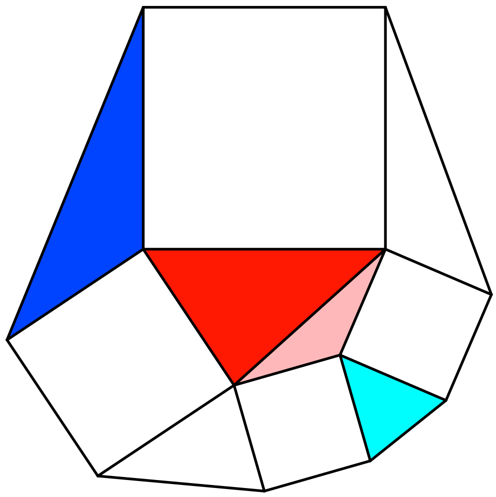

Abb. 6: Gegenüberliegende Flossen

Die Summe aller Flossenflächen ist daher das Doppelte der Viereckfläche.

Bei nicht konvexen Vierecken müssen wir mit orientierten Flossenflächeninhalten arbeiten.

Im Sonderfall des Parallelogramms haben wir aber vier gleich große Flossen (Abb. 7).

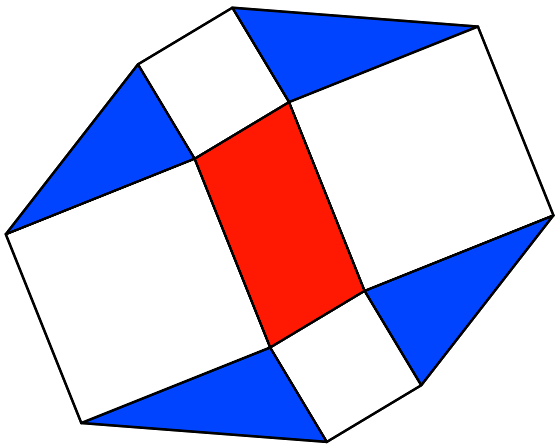

Abb. 7: Sonderfall Parallelogramm

Die Flossen sind je das halbe Parallelogramm (Halbierung durch Diagonalen).

4 Affinreguläre Vielecke

Für beliebige Vielecke mit Eckenzahl größer oder gleich fünf habe ich keine schöne Eigenschaft der Flossen gefunden.

Hingegen gilt: Bei einem affinregulären n-Eck (affinreguläre Vielecke sind affine Bilder von regulären Vielecken) sind alle Flossen gleich groß. Das Verhältnis einer Flossenfläche zur Fläche des affinregulären n-Eckes ist $\frac{4}{n}\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)$. Dieses Verhältnis ist also unabhängig von der Form des affinregulären Vieleckes. Wir haben eine Flosseninvariante.

Die Abbildung 8 illustriert die Situation für ein affinreguläres Siebeneck.

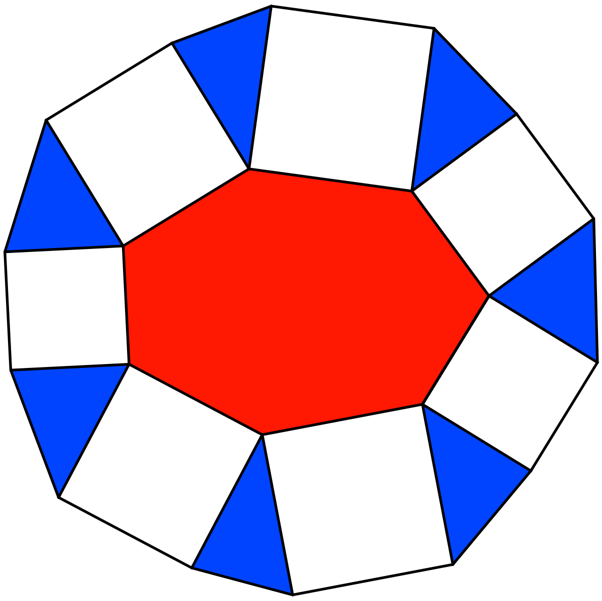

Abb. 8: Affinreguläres Siebeneck. Flächengleiche Flossen

Für den Beweis halten wir zunächst einmal die Flächengleichheit gemäß Abbildung 9 fest.

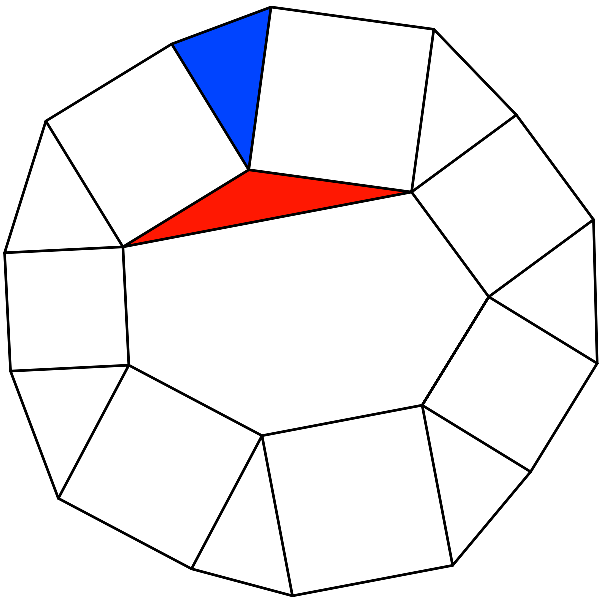

Abb. 9: Flächengleichheit

Nun sind aber in einem affinregulären Vieleck sämtliche Dreiecke, welche von zwei aufeinanderfolgenden Seiten aufgespannt werden, flächengleich. Daher sind auch alle Flossen flächengleich. Die Verhältniszahl $\frac{4}{n}\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)$ lässt sich aus dem Sonderfall des regulären Vieleckes ermitteln.