Hans Walser, [20150822]

Flächenvergleiche

1 Quadrate

Wir setzen vier Quadrate aneinander gemäß Abbildung 1. Die Seitenlängen der beiden ersten Quadrate können beliebig gewählt werden. Die Seiten der letzten beiden Quadrate ergeben sich dann.

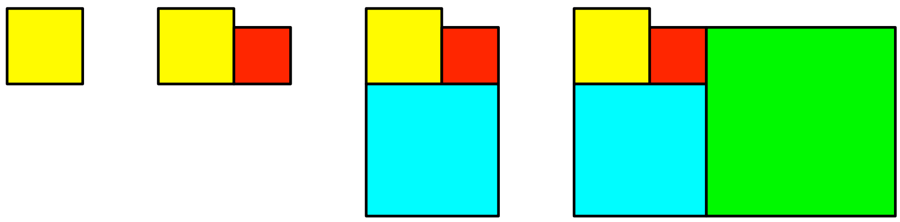

Abb. 1: Aneinandersetzen der Quadrate

In dieser Situation gilt die Flächenrelation:

Erstes plus letztes Quadrat = zweimal (zweites plus drittes Quadrat)

Für den rechnerischen Beweis verwenden wir die Bezeichnungen der Abbildung 2.

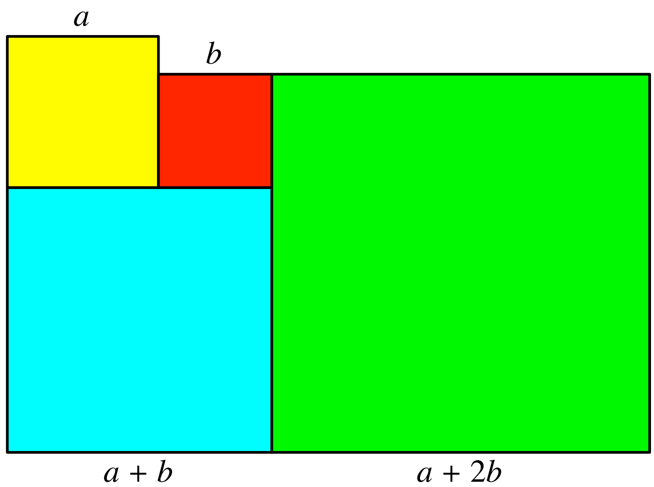

Abb. 2: Bezeichnungen

Es ist:

$$\begin{aligned} \text{gelb + grün } &= a^2 + (a+2b)^2 = 2a^2 + 4ab + 4b^2 \\ \text{rot + zyan } &= b^2 + (a+b)^2 = a^2 + 2ab + 2b^2 \end{aligned} \tag{1}$$

Die Abbildung 3 zeigt einen Zerlegungsbeweis.

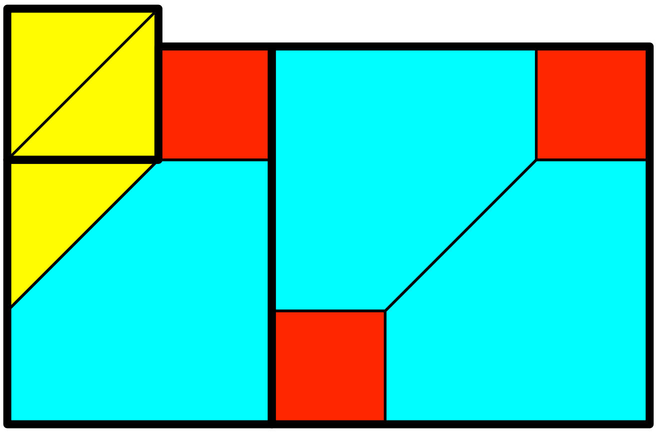

Abb. 3: Zerlegungsbeweis

2 Gleichseitige Dreiecke

Aneinanderfügen der Dreiecke gemäß Abbildung 4.

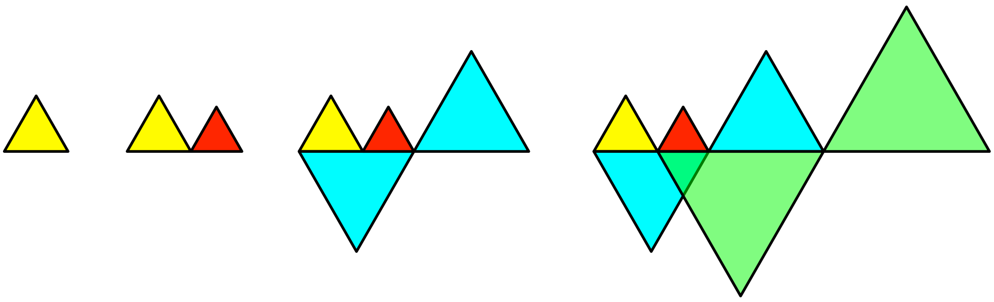

Abb. 4: Dreiecke aneinanderfügen

In dieser Situation gilt die Flächenrelation:

Erstes plus letztes Dreieck = zweimal (zweites plus drittes Dreieck)

Für die Schulbubenrechnung verwenden wir die Bezeichnungen der Abbildung 5.

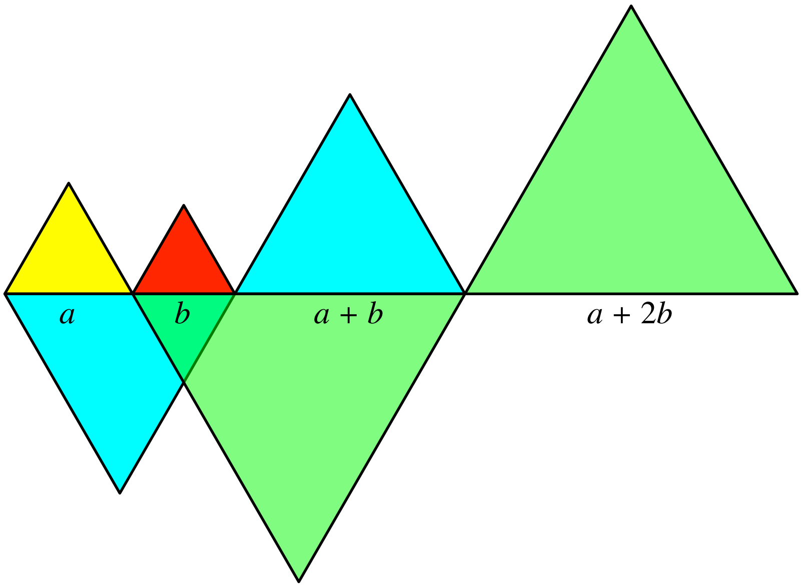

Abb. 5: Bezeichnungen

Es ist:

$$
\begin{aligned}
\text{gelb + grün } &= \tfrac{\sqrt{3}}{4}a^2 + \tfrac{\sqrt{3}}{4}(a+2b)^2 = \tfrac{\sqrt{3}}{4}\left(2a^2 + 4ab + 4b^2\right) \\
\text{rot + zyan } &= \tfrac{\sqrt{3}}{4}b^2 + \tfrac{\sqrt{3}}{4}(a+b)^2 = \tfrac{\sqrt{3}}{4}\left(a^2 + 2ab + 2b^2\right)
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Die Abbildung 6 zeigt einen Zerlegungsbeweis.

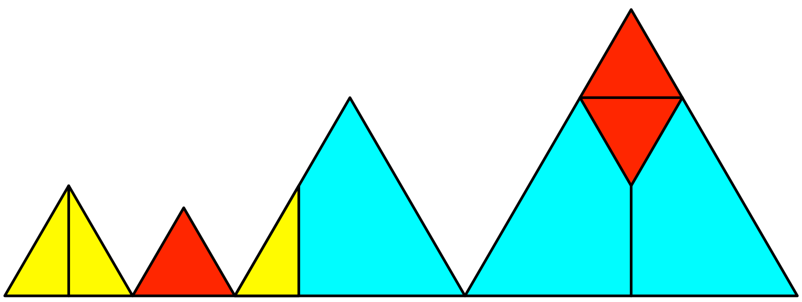

Abb. 6: Zerlegungsbeweis