Hans Walser, [20130529]

Flächengleiche Rechtecke

1 Worum es geht

Flächengleiche Rechtecke und Parallelogramme sind zerlegungsgleich. Es werden einige Beispiele zum Auffinden der Zerlegungsgleichheit diskutiert.

2 Flächengleiche Rechtecke

Flächengleiche Rechtecke lassen sich mit der Gnomon-Konstruktion finden (Abb. 1). Die beiden grauen Rechtecke sind flächengleich.

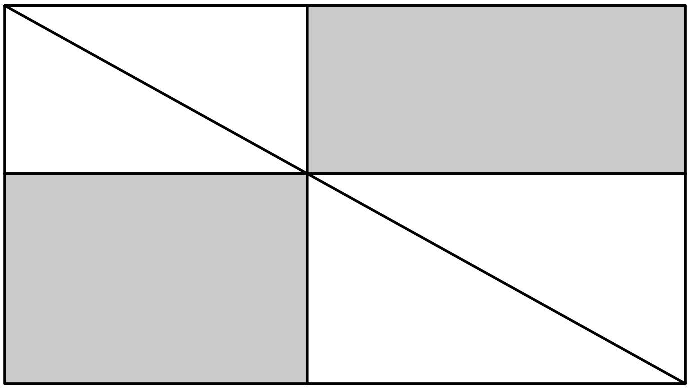

Abb. 1: Gnomon

3 Grundform der Zerlegung

Die Abbildung 2 zeigt die einfachste Form einer gemeinsamen Zerlegung.

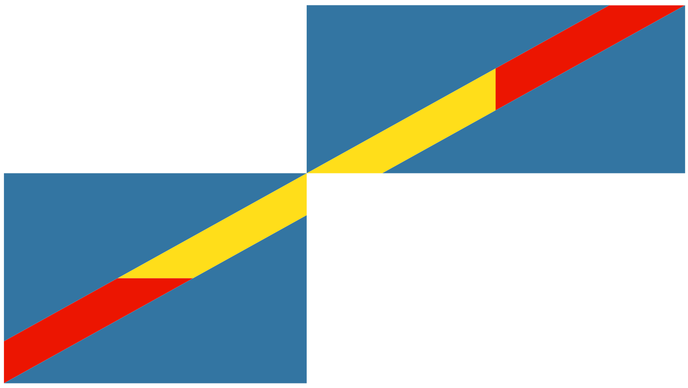

Abb. 2: Zerlegungsgleichheit

Die entsprechenden Puzzle-Teile lassen sich durch eine Translation ineinander überführen. Jedes Rechteck ist punktsymmetrisch zerlegt.

Die Abbildung 3 zeigt eine Variante der Zerlegung, die zwar auch punktsymmetrisch ist, aber mehr Puzzle-Teile benötigt. Wir lassen diese Variante im Folgenden weg.

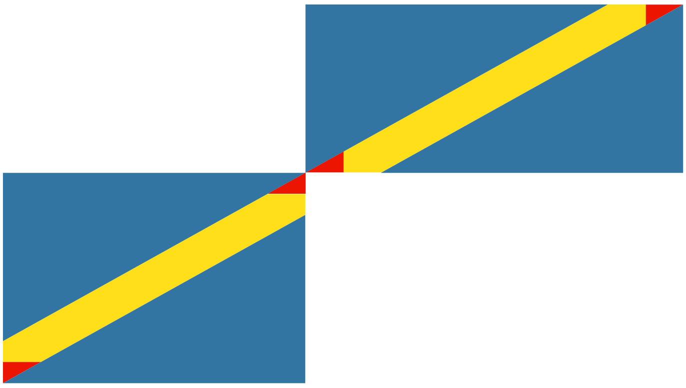

Abb. 3: Variante

4 Transposition

Nun transponieren wir eines der beiden Rechtecke. Transponieren heißt, dass wir die Maße für Länge und Breite vertauschen. Wir nehmen also eines der beiden Rechtecke im Hochformat. Dann ergibt sich eine andere gemeinsame Zerlegung (Abb. 4).

Abb. 4: Transponiertes Rechteck

Die Puzzle-Teile sind nicht mit denen der Abbildung 2 kompatibel, obwohl die beiden Rechtecke kongruent sind. Auch das Umrechteck für die Gnomonkonstruktion hat andere Ausmaße.

5 Einbauen von Rechtecken

Die Abbildung 5 zeigt ein Beispiel, das zunächst ganz harmlos aussieht.

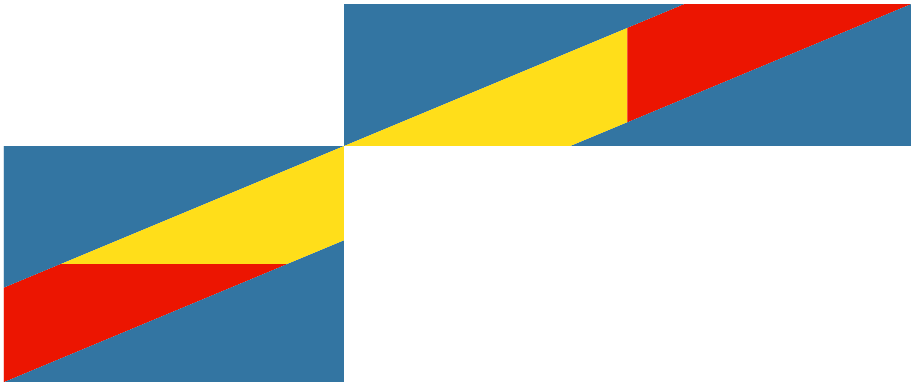

Abb. 5: Ein harmloses Beispiel

Wenn wir jedoch das eine Rechteck transponieren, kommen wir mit der üblichen Konstruktion nicht mehr durch. Wir können das Problem auf verschiedene Weisen lösen. In der Abbildung 6 sind zusätzliche rechtwinklige Dreiecke eingebaut worden.

Abb. 6: Zusätzliche Dreiecke

Die Dreiecke können teilweise zu Rechtecken zusammengefasst werden (Abb. 7).

Abb. 7: Rechtecke als Puzzle-Teile

Natürlich stört uns die fehlende Symmetrie. Dies kann mit Unterteilung der Rechtecke angegangen werden (Abb. 8).

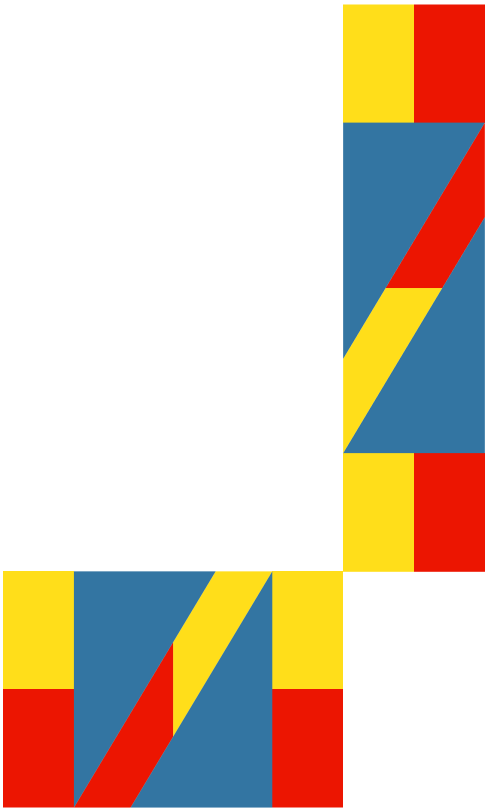

Abb. 8: Symmetrische Zerlegungen

6 Rationale Seitenverhältnisse

Die Rechtecke der Abbildungen 1 und 2 haben die Längen 4cm und 5cm (Abb. 9). Diese Lägen sind ein einem rationalen Verhältnis.

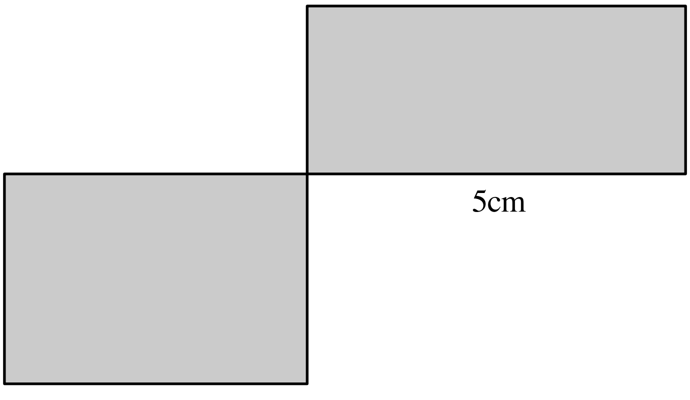

Abb. 9: Rationales Verhältnis

In diesem Fall gibt es eine gemeinsame Zerlegung ausschließlich durch Rechtecke, welche zu den Ausgangsrechtecken seitenparallel sind und durch Translationen ineinander übergeführt werden können.

6.1 Rechteckraster

Die Abbildung 10 zeigt eine Rasterlösung. Wir haben formmäßig nur ein Puzzle-Teil. Für jedes Rechteck benötigen wir 20 Puzzle-Teile.

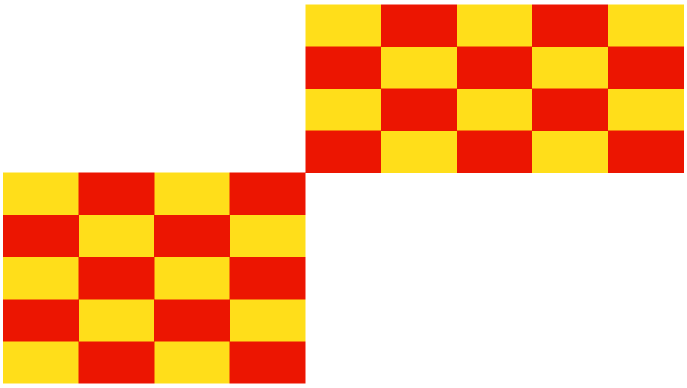

Abb. 10: Rasterlösung

Die Abbildung 11 zeigt die Rasterlösung für den transponierten Fall. Die Puzzle-Teile haben eine andere Form. Wir benötigen für jedes Rechteck 45 Puzzle-Teile.

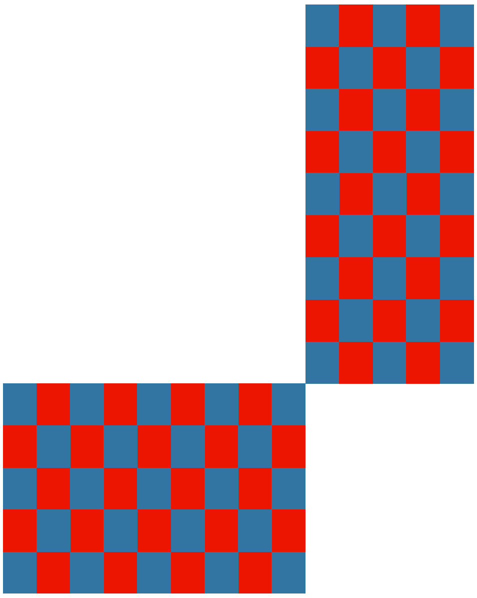

Abb. 11: Rasterlösung für den transponierten Fall

6.2 Rechtecke

Wenn wir mit Rechtecken verschiedener Größe arbeiten, brauchen wir insgesamt weniger Puzzle-Teile (Abb. 12).

Abb. 12: Zerlegung in Rechtecke

Das funktioniert auch im transponierten Fall, aber die Puzzle-Rechtecke haben eine andere Form (Abb. 13). Auch die Anzahl der benötigten Puzzle-Teile ist anders.

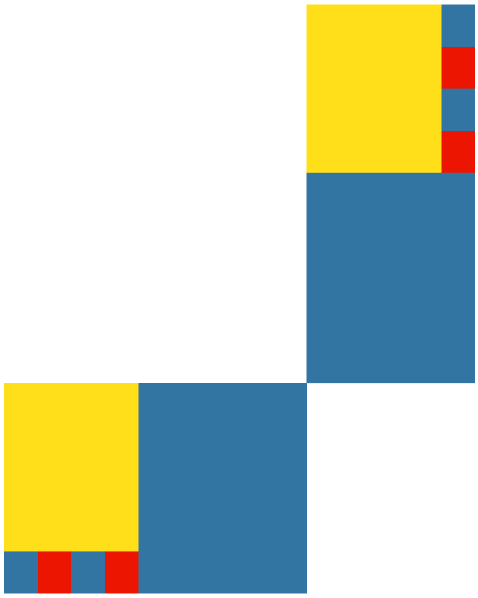

Abb. 13: Transponierte Version

6.3 Treppen

Die Abbildung 14 zeigt eine Treppenlösung für das Beispiel der Abbildung 12.

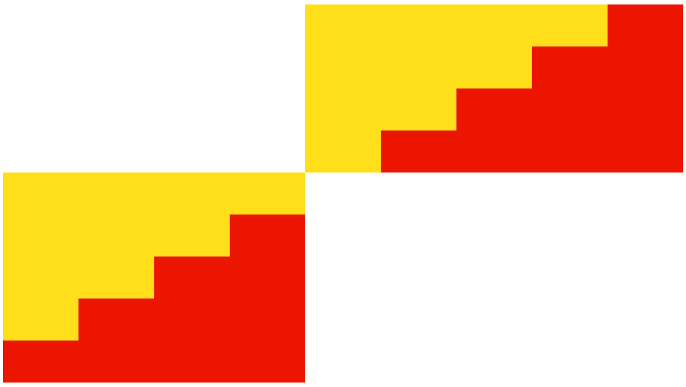

Abb. 14: Gruß von James Joseph Sylvester

Wir benötigen lediglich zwei Puzzle-Teile. In der transponierten Version (vgl. Abb. 13) ist die Treppenlösung weniger elegant (Abb. 15).

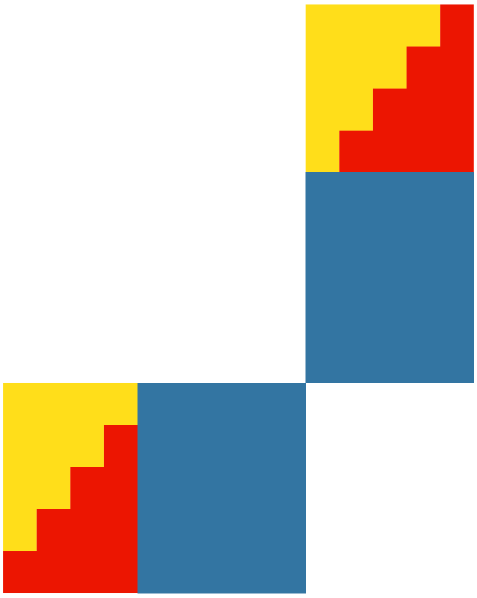

Abb. 15: Transponierte Version mit Treppe

6.4 US Letter

Wir vergleichen das US Letter-Format zwischen Querformat und Hochformat. Wegen den Ausmaßen 11 in auf 8.5 in haben wir ein rationales Verhältnis. Eine Zerlegung mit translationsgleichen Rechtecken ist möglich (Abb. 16).

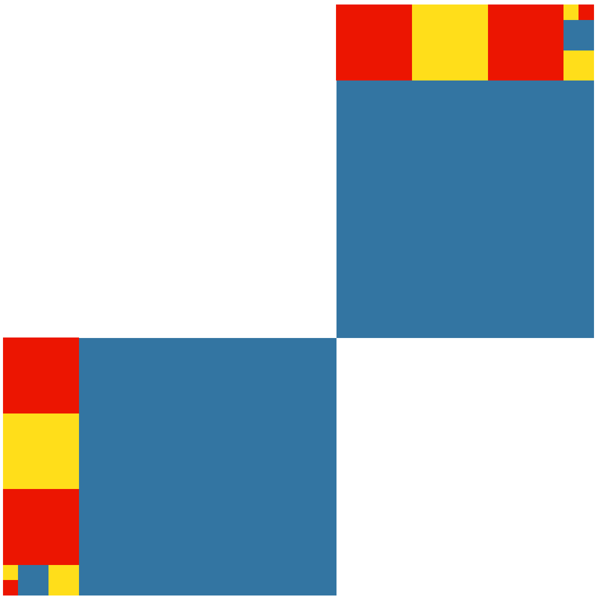

Abb. 61: US Letter

7 DIN-Format

Das DIN-Format hat das irrationale Seitenverhältnis $\sqrt{2}$. Zwar können wir noch eine Zerlegung mit endlich vielen Dreiecken vornehmen (Abb. 17). Die gelben und roten Trapeze sind gleichschenklig und haben Basiswinkel von 45°. Zudem ist die Deckparallele gleich lang wie die Schenkel.

Abb. 17: DIN-Format und Zerlegung

Eine Zerlegung mit translationsgleichen Rechtecken ist spannend. Zunächst können wir je ein Quadrat abschneiden (Abb. 18).

Abb. 18: Abschneiden von je einem Quadrat

Es bleiben dann zwei kongruente Restrechtecke mit den Seitenverhältnissen $\left(\sqrt{2}+1\right):1$ beziehungsweise $1:\left(\sqrt{2}+1\right)$ übrig, eins im Hoch- und das andere im Querformat. Rechtecke mit diesem Seitenverhältnis werden als *Silberne Rechtecke* bezeichnet. Bei einem Silbernen Rechteck können wir zwei Quadrate abschneiden, aber das noch verbleibende Restrechteck ist wieder ein Silbernes Rechteck (Abb.19).

Abb. 19: Abschneiden je zweier Rechtecke

Das geht nun so weiter (Abb. 20).

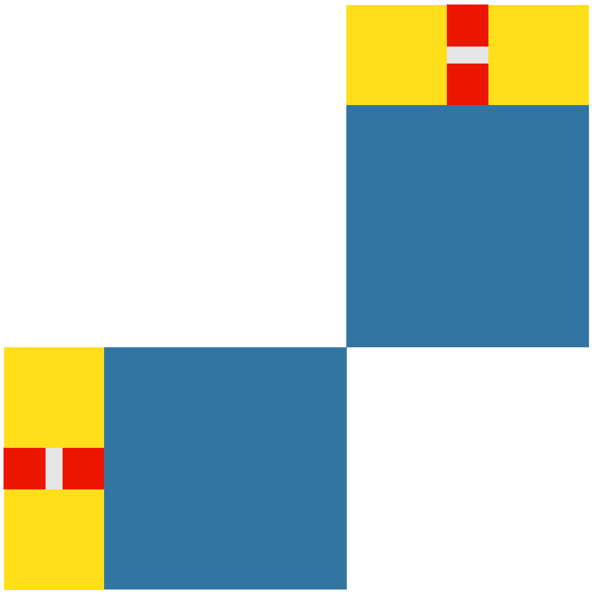

Abb. 20: Nächster Schritt

Das Verfahren terminiert nicht. Wir erhalten eine unendliche Folge von Rechteckpaaren.

8 Parallelogramme

Unsere Überlegungen lassen sich auf Parallelogramme übertragen (Abb. 21).

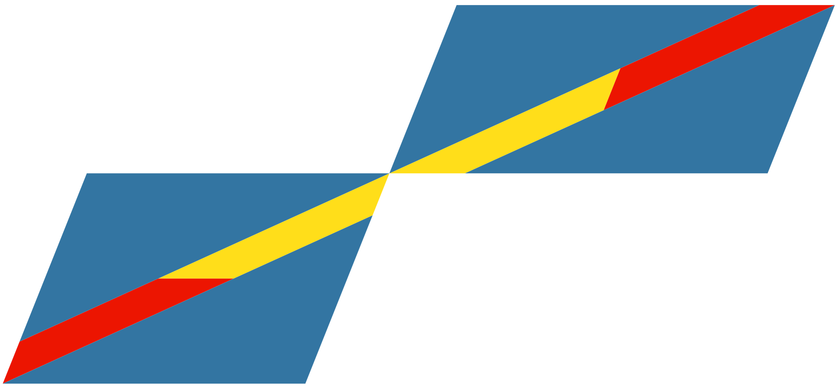

Abb. 21: Flächengleiche Parallelogramme

In der Abbildung 22 ist eines der Parallelogramme transponiert worden.

Abb. 22: Transponiert

In der Abbildung 23 ist eines der Parallelogramme der Abbildung 21 verschoben worden. Die Parallelogramme berühren sich nun an einer stumpfen Ecke.

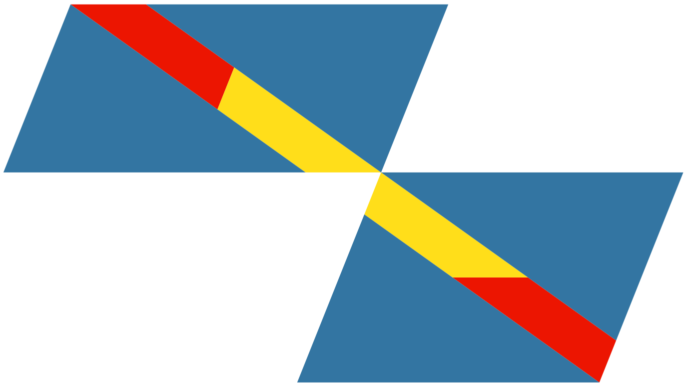

Abb. 23: Berührung an stumpfer Ecke

Schließlich können wir auch hier transponieren (Abb. 24).

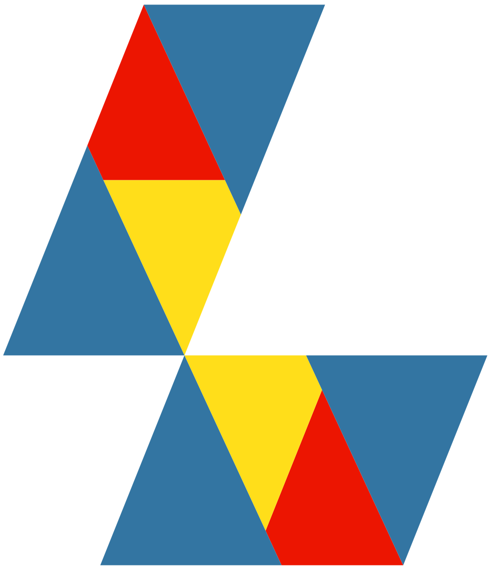

Abb. 24: Berührung an stumpfer Ecke. Transponiert

Die Puzzle-Bauteile der Abbildungen 21 bis 24 sind alle verschieden, obwohl die Startparallelogramme kongruent sind.

9 Schiefe Rechtecke

Wir bearbeiten nun zwei zwar flächengleiche, aber nicht seitenparallele Rechtecke (Abb. 25).

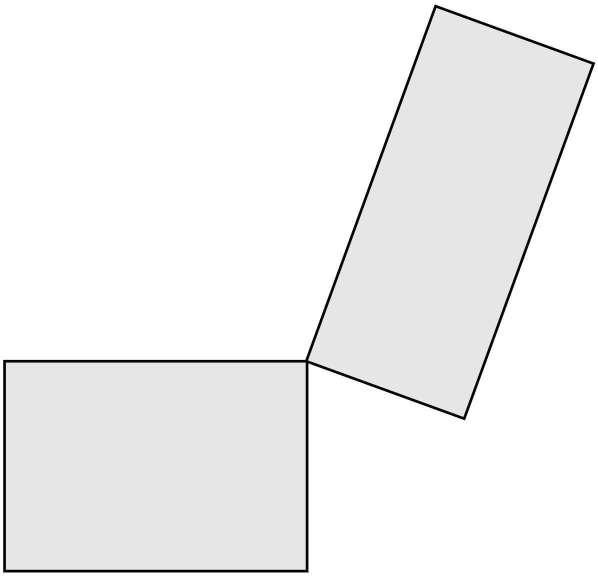

Abb. 25: Flächengleiche, aber schiefe Rechtecke

Die Idee ist, diese durch geeignetes Abschneiden und Ansetzen von Dreiecken in die Situation von zwei seitenparallelen Parallelogramme gemäß Abbildungen 16 bis 19 zu bringen, darin die Zerlegung durchzuführen und schließlich das Abschneiden und Ansetzen geeignet rückgängig zu machen. Die Abbildung 26 zeigt zunächst das Abschneiden und Ansetzen.

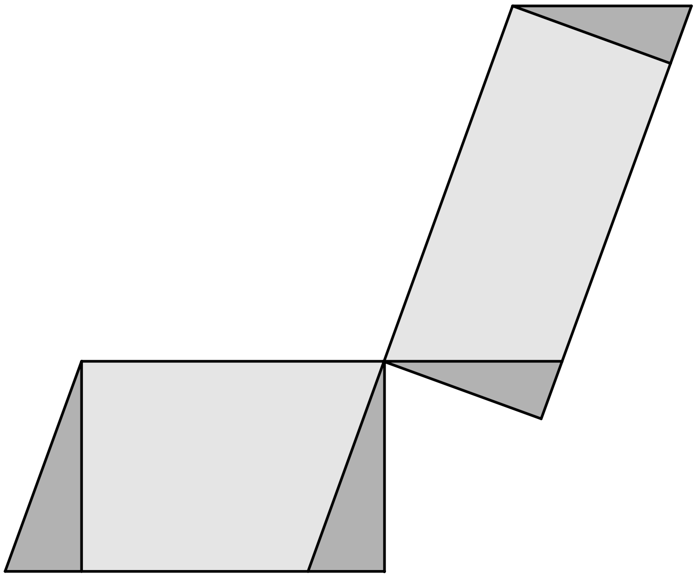

Abb. 26: Abschneiden und Ansetzen

Die Abbildung 27 zeigt das Resultat der Zerlegung. Sämtliche entsprechende Puzzle-Teile können durch Translationen ineinander übergeführt werden.

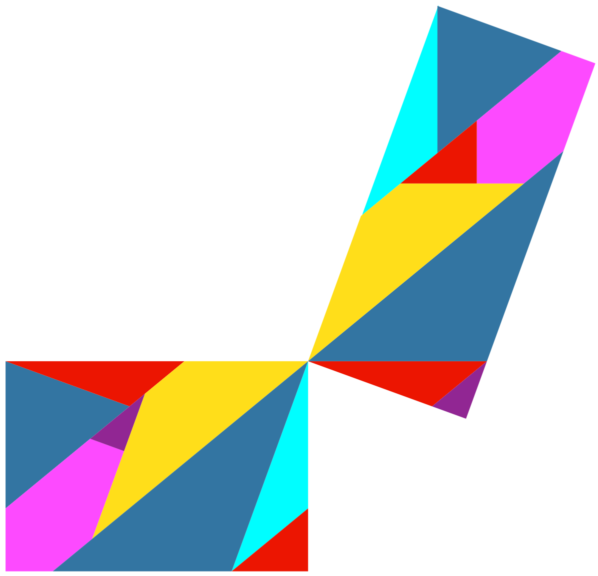

Abb. 27: Zerlegung

Schön und gut. Es fehlt allerdings die Symmetrie der Zerlegungen der einzelnen Rechtecke. Das erhalten wir, wenn wir das Abschneiden und Ansetzen punktsymmetrisch gestalten (Abb. 28). Dazu müssen wir die beiden Rechtecke etwas auseinanderrücken.

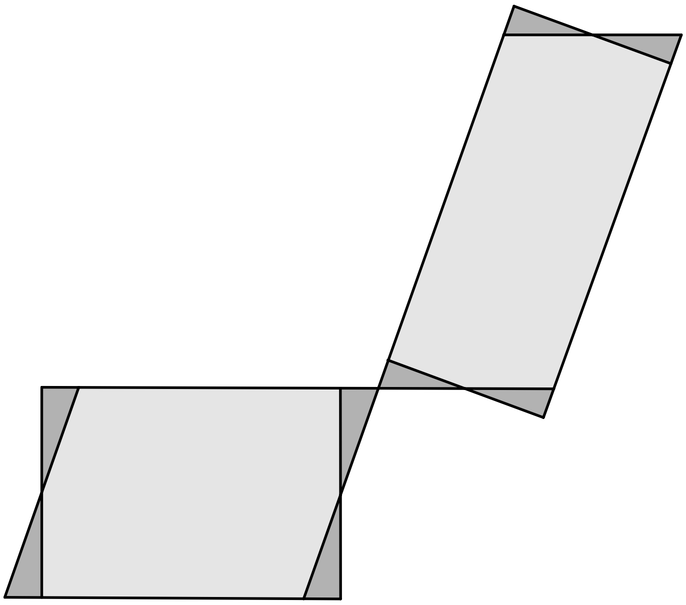

Abb. 28: Punktsymmetrisches Abschneiden und Ansetzen

Nun können wir eine punktsymmetrische Zerlegung anstellen (Abb. 29).

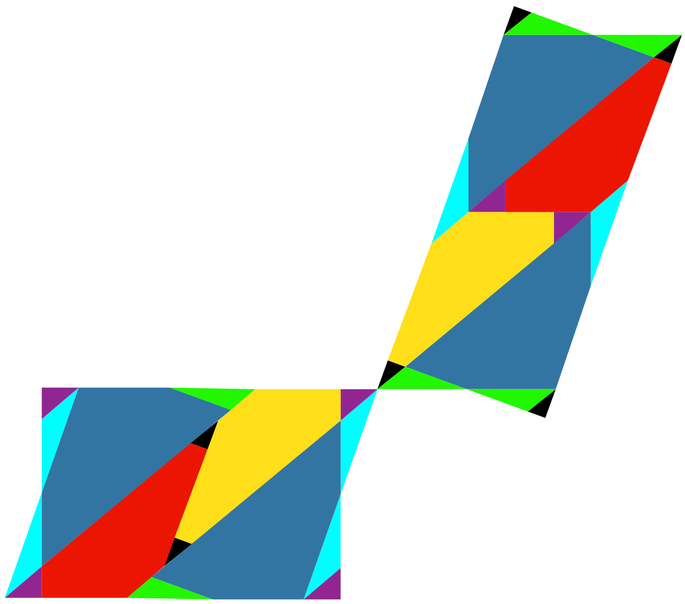

Abb. 29: Punktsymmetrische Zerlegung

Schließlich schneiden wir das Angefügte wieder ab (Abb. 30).

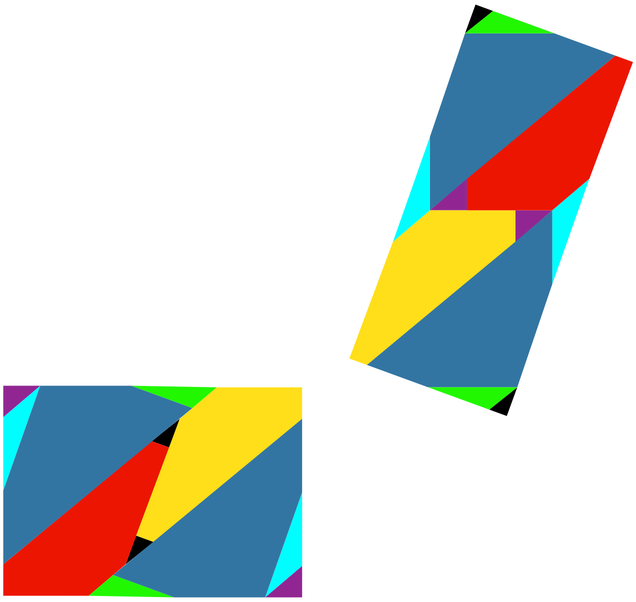

Abb. 30: Punktsymmetrische Rechteckzerlegung

Die Meinung, der „Diagonalstreifen“ sei geknickt, ist eine optische Täuschung (Abb. 31). Wir haben das Bedürfnis, das schräge Rechteck „geradezurücken“.

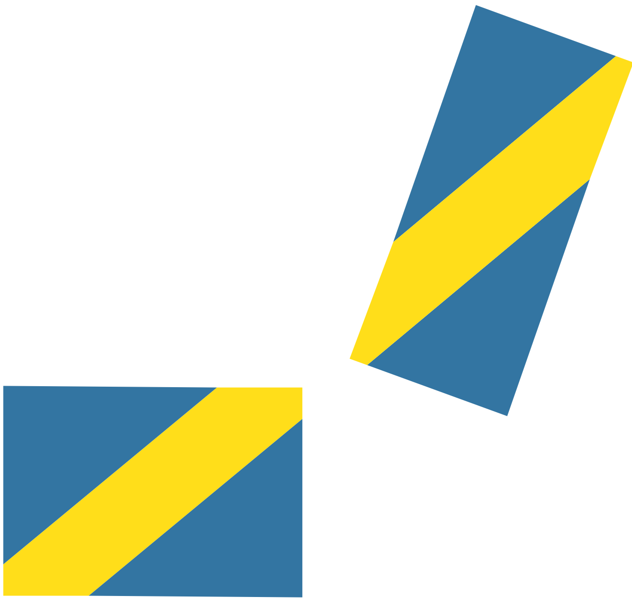

Abb. 31: Ist der gelbe Streifen geknickt?

Nun rücken wir die Rechtecke wieder zusammen (Abb. 32)

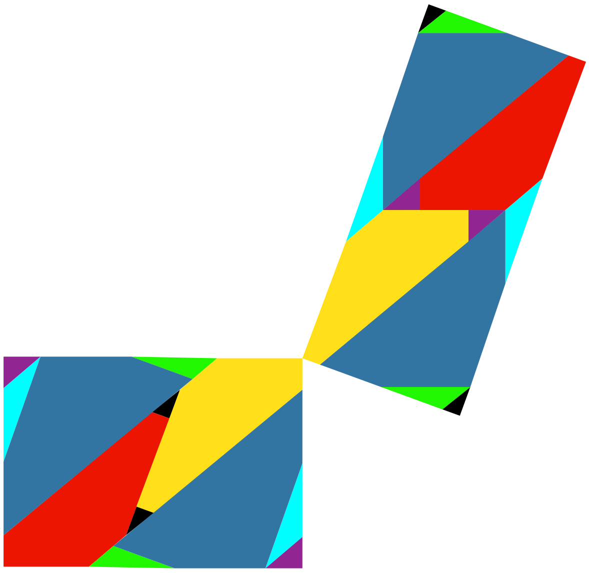

Abb. 32: Punktsymmetrische Rechteckzerlegung

Im Unterschied zu der Abbildung 32 ist der „Diagonalstreifen“ versetzt. Er ist aber nach wie vor nicht geknickt.

10 Kathetensatz

Schiefe flächengleiche Rechtecke kommen beim Kathetensatz vor, eines der beiden Rechtecke ist jeweils ein Quadrat (Abb. 33).

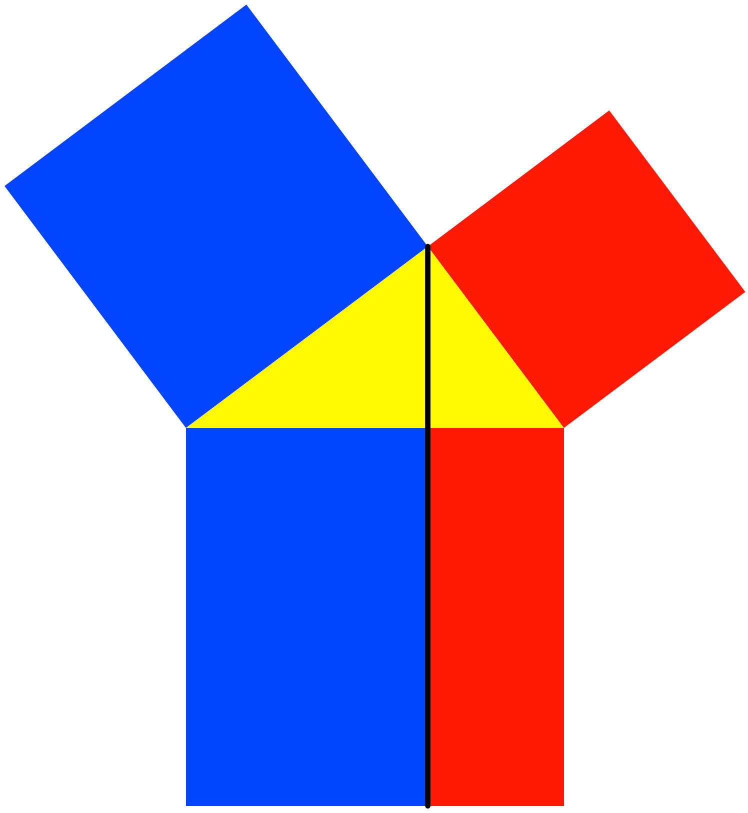

Abb. 33: Erinnerung an die Schule

Die Abbildung 34 zeigt die Zerlegung des roten Anteils.

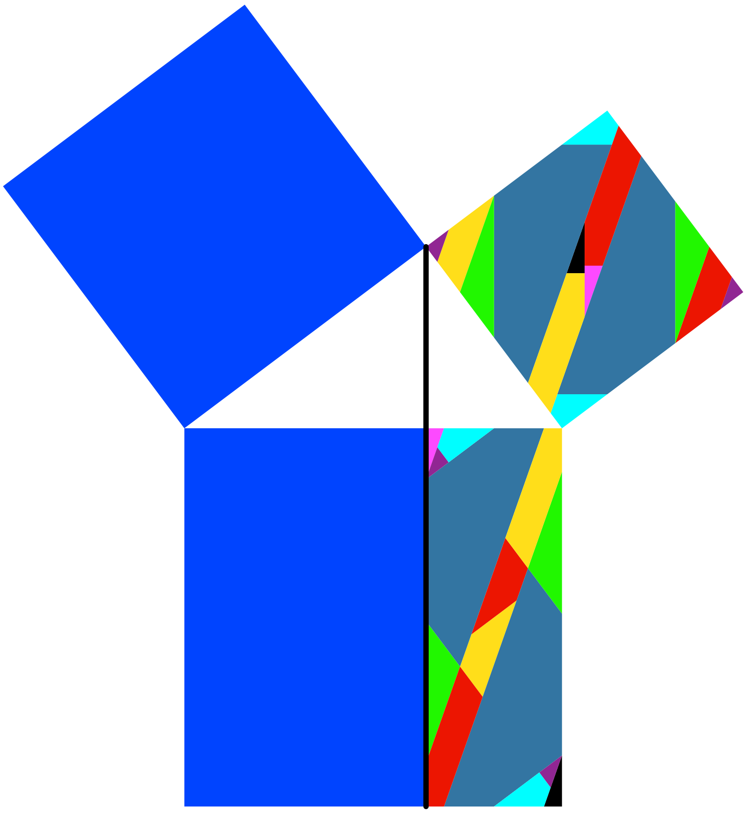

Abb. 34: Zerlegung des Anteils rechts

Die Abbildung 35 gibt beide Zerlegungen.

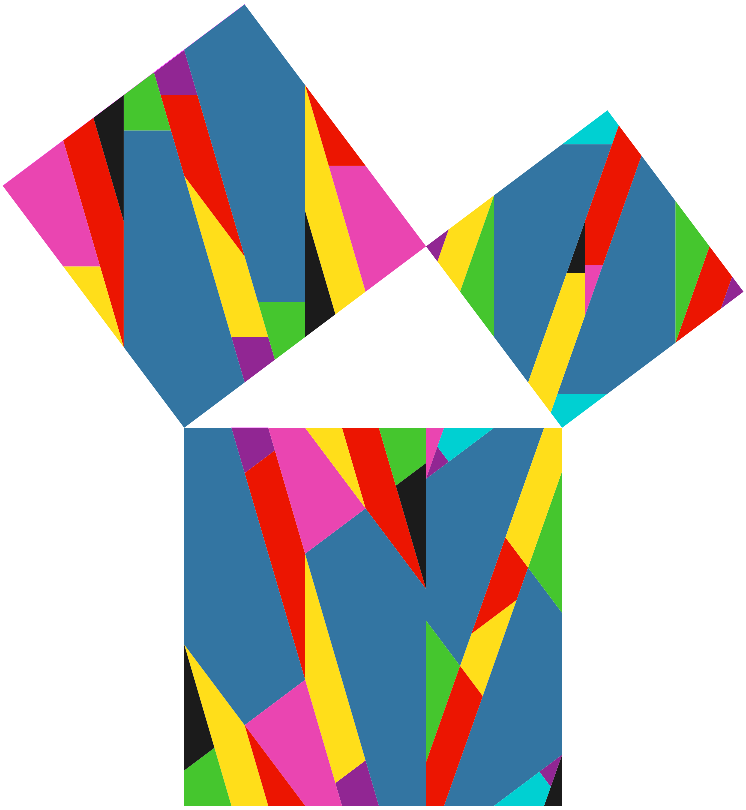

Abb. 35: Kathetensatz

Die Abbildung 36 zeigt eine Verallgemeinerung des Kathetensatzes auf beliebige Dreiecke. Rechtecke gleicher Farbe sind flächengleich.

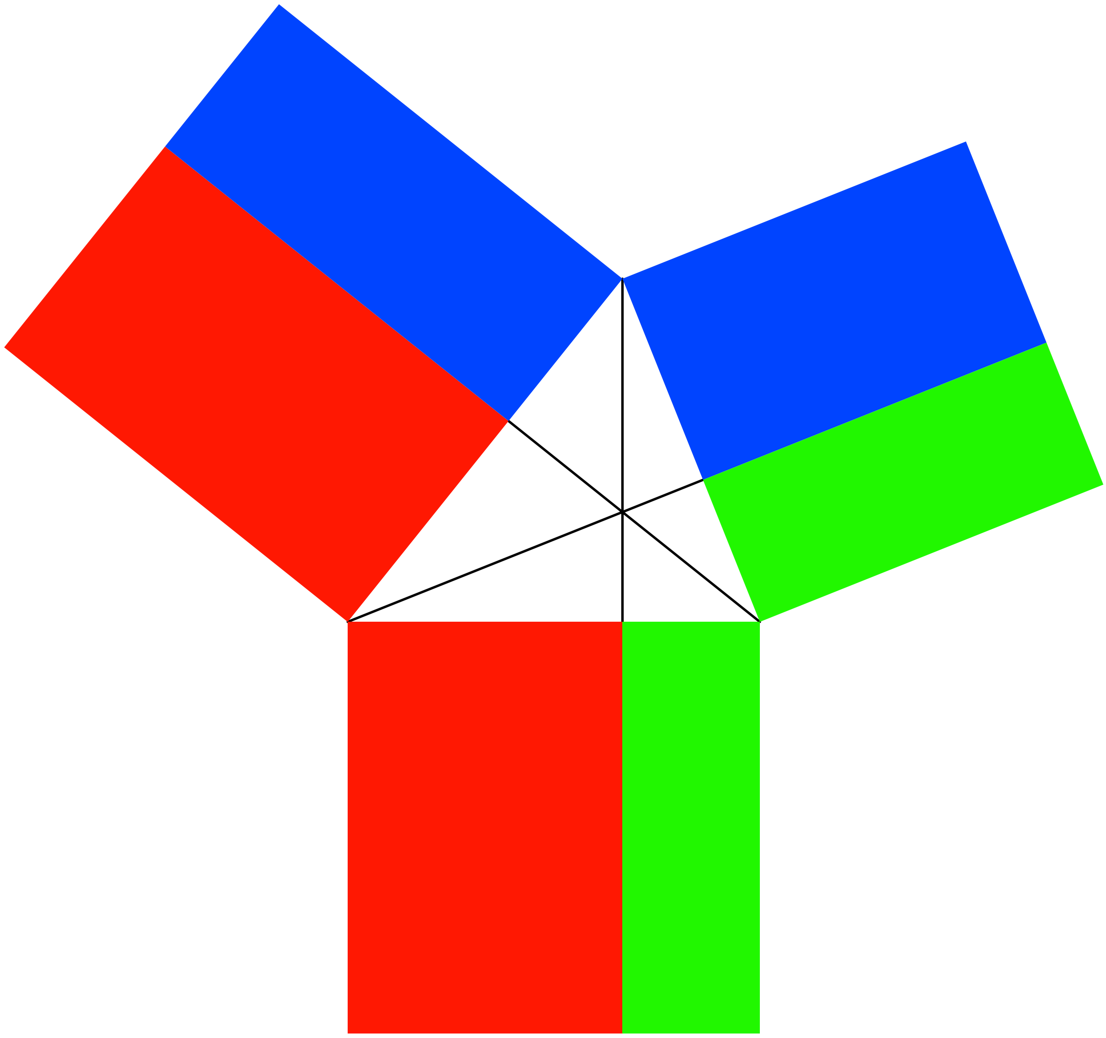

Abb. 36: Flächengleiche Rechtecke

In der Abbildung 37 die Zerlegung.

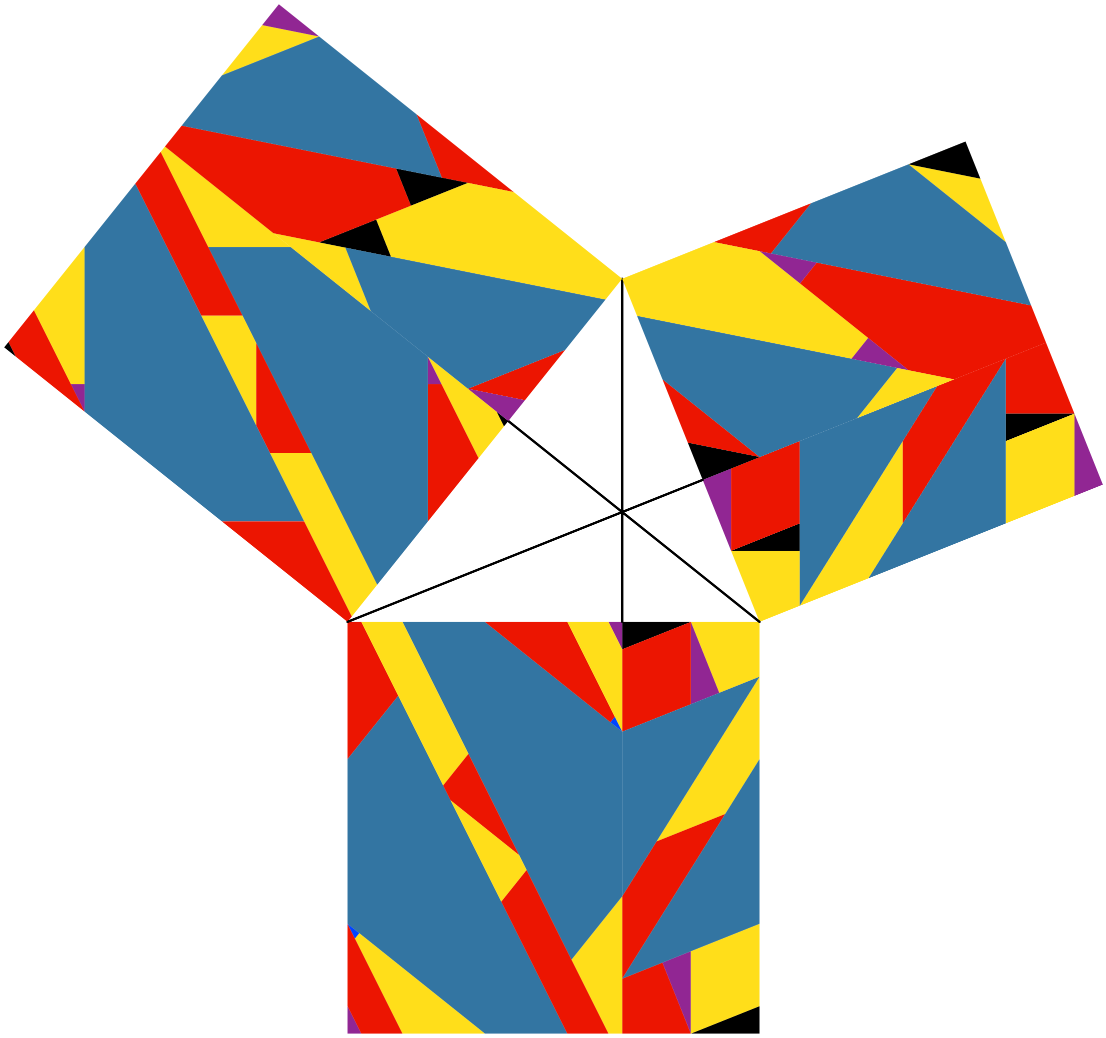

Abb. 37: Zerlegung

11 Ein falscher Zerlegungsbeweis

In der Abbildung 38 sehen wir ein Quadrat und ein Rechteck mit bei oberflächlichem Hinsehen gemeinsamer Zerlegung.

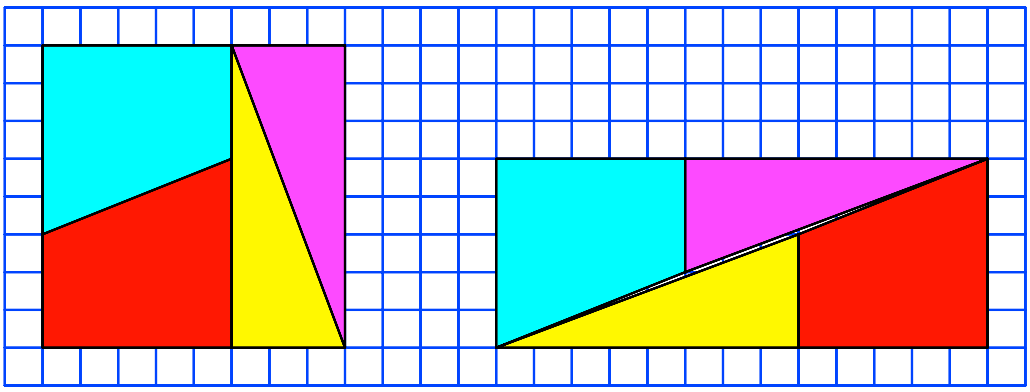

Abb. 38: Gemeinsame Zerlegung?

Das 8 mal 8 Quadrat hat einen Flächeninhalt von 64 Einheiten, das 13 mal 5 Rechteck aber einen Flächeninhalt von 65 Einheiten. Bei genauem Hinsehen erkennen wir, dass die Zerlegung nicht stimmt. Beim Rechteck haben wir eine offene Spalte.

Die in der Abbildung 38 auftretenden Maßzahlen sind 3, 5, 8, 13. Das sind aufeinanderfolgende Fibonacci-Zahlen. Der Trick geht immer mit vier aufeinanderfolgenden Fibonacci-Zahlen. Die Abbildung 39 zeigt die Situation für 5, 8, 13, 21. Nun ist 13 mal 13 gleich 169, hingegen 21 mal 8 nur 168. Das Rechteck hat eine Einheit verloren (durch Überlappung).

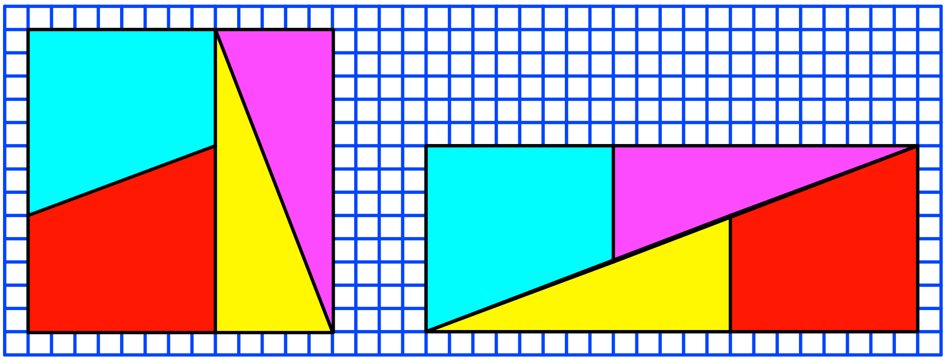

Abb. 39: Gemeinsame Zerlegung?

Zerlegungsbeweise sind also erst dann gültig, wenn nachgewiesen ist, dass alle Puzzle-Teile sich lückenlos und ohne Überlappung aneinanderfügen.