Hans Walser, [20150806], [20150810]

Flächenoptimierung im Viereck

Anregung: Chr. K., B.

1 Worum geht es

Wir beweisen den Satz:

Unter allen Vierecken mit gegebenen Seiten *a, b, c, d* hat das Sehnenviereck den größten Flächeninhalt.

2 Beweis

Wir verwenden die üblichen Bezeichnungen (Abb. 1) und unterteilen das Viereck mit der Diagonalen *e* in zwei Teildreiecke.

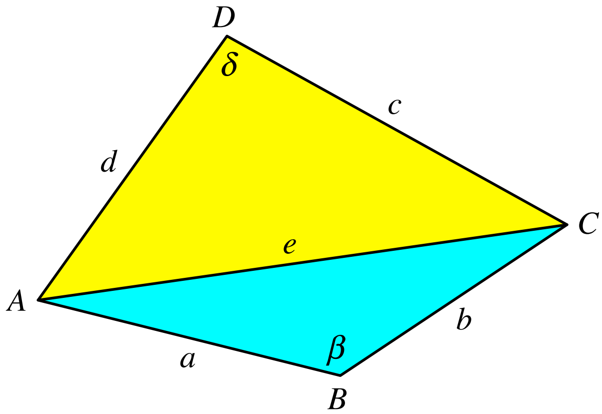

Abb. 1: Bezeichnungen. Unterteilung

Für den Flächeninhalt *A* des Viereckes gilt daher:

$$A(\beta,\delta)=\tfrac{1}{2}\big(ab\sin(\beta)+cd\sin(\delta)\big) \tag{1}$$

Nach dem Kosinussatz gilt für die Diagonale *e*:

$$\begin{aligned} e^2 &= a^2+b^2-2ab\cos(\beta) \\ e^2 &= c^2+d^2-2dc\cos(\delta) \end{aligned} \tag{2}$$

Somit haben wir die Nebenbedingung:

$$\Phi(\beta,\delta)=a^2+b^2-2ab\cos(\beta)-c^2-d^2+2dc\cos(\delta)=0 \tag{3}$$

Wir haben die Funktion $A(\beta,\delta)$ unter der Nebenbedingung $\Phi(\beta,\delta)=0$ zu optimieren. Nach dem üblichen Verfahren bilden wir die Hilfsfunktion

$$F(\beta,\delta,\lambda)=A(\beta,\delta)-\lambda\Phi(\beta,\delta) \qquad (4)$$

und setzen deren Gradienten null:

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial F}{\partial \beta} &= \tfrac{1}{2}ab\cos(\beta)-2ab\lambda\sin(\beta)=0\\
\tfrac{\partial F}{\partial \delta} &= \tfrac{1}{2}cd\cos(\delta)+2cd\lambda\sin(\delta)=0\\
\tfrac{\partial F}{\partial \lambda} &= -a^2-b^2+2ab\cos(\beta)+c^2+d^2-2dc\cos(\delta)=0
\end{aligned} \qquad (5)$$

Die ersten beiden Gleichungen lauten vereinfacht:

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\cos(\beta) &= 2\lambda\sin(\beta) &&\Rightarrow \quad \lambda=\tfrac{1}{4\tan(\beta)}\\
\tfrac{1}{2}\cos(\delta) &= -2\lambda\sin(\delta) &&\Rightarrow \quad \lambda=-\tfrac{1}{4\tan(\delta)}
\end{aligned} \qquad (6)$$

Aus $\tan(\delta)=-\tan(\beta)$ folgt $\beta+\delta=\pi$. Wir haben ein Sehnenviereck.

3 Bestimmung des Sehnenviereckes

Zu gegebenen vier Seiten ist ein Viereck bei Kenntnis eines Winkels bestimmt.
Wenn wir nun $\delta=\pi-\beta$ in die Nebenbedingung $\Phi(\beta,\delta)=0$ einsetzen, erhalten wir:

$$\cos(\beta)=\tfrac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)} \qquad (5)$$

Die Abbildung 2 zeigt das zu den Seitenlängen *a, b, c, d* des Viereckes der Abbildung 1 gehörende Sehnenviereck.

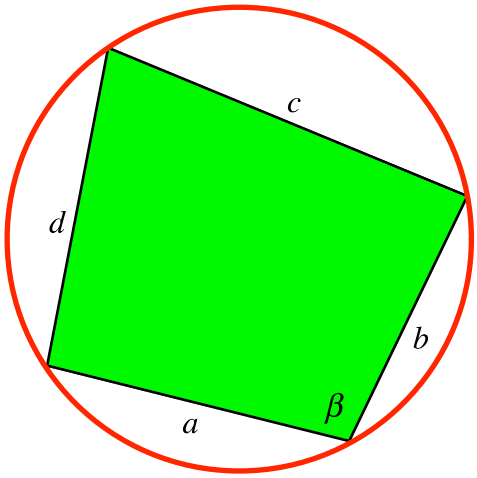

Abb. 2: Sehnenviereck

4 Rechnereien

Wir berechnen weitere Daten des durch die vier Seiten *a, b, c, d* gegebenen Sehnenvierecks.

4.1 Flächeninhalt

Aus (7) ergibt sich durch Umrechnen auf Sinus:

$$\begin{aligned}\sin(\beta) &= \frac{\sqrt{4(ab+cd)^2-\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2}}{2(ab+cd)}\\ &= \frac{\sqrt{-a^4-b^4-c^4-d^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2a^2d^2+2b^2c^2+2b^2d^2+2c^2d^2+8abcd}}{2(ab+cd)}\\ &= \frac{\sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}}{2(ab+cd)}\end{aligned} \tag{8}$$

Wegen $\delta = \pi - \beta$ ist:

$$\sin(\delta) = \sin(\beta) \tag{9}$$

Wir setzen (8) und (9) in (1) ein und erhalten für den Flächeninhalt *A*:

$$A = \tfrac{1}{4}\sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)} \tag{10}$$

Mit $s = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$ (halber Umfang) kann die Flächenformel auch in der folgenden Form geschrieben werden:

$$A=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} \tag{10a}$$

Das ist die Formel von Brahmagupta (598-670). Für d = 0 ergibt sich die Heronsche Formel für die Dreiecksfläche.

4.2 Diagonalen

Wir setzen (5) in (2) ein und erhalten für die Diagonale e:

$$e^2=\frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd} \tag{11}$$

Durch zyklische Vertauschung ergibt sich für die Diagonale f:

$$f^2=\frac{(ba+cd)(bd+ca)}{bc+da}=\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc} \tag{12}$$

Aus (11) und (12) ergibt sich:

$$\begin{aligned} e^2f^2&=(ac+bd)^2\\ ef&=ac+db \end{aligned} \tag{13}$$

Dies ist der Satz von Ptolemäus.

4.3 Umkreisradius

Für den Umkreisradius r gilt im Dreieck ABC (Abb. 1):

$$r\sin(\beta)=\tfrac{e}{2} \tag{14}$$

Einsetzen von (8) und (11) liefert:

$$r=\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}}=\frac{\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}}{4A} \tag{15}$$

Isch dös a Rechnerei!

5 Ausblick. Isoperimetrisches Problem

Es gilt:

Ein n-Eck mit gegebenen Seiten $a_k, k = 1, \ldots, n$, hat genau dann maximalen Flächeninhalt, wenn seine Ecken auf einem Kreis liegen (Sehnen-n-Eck).
Beweis: www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/I/Isoper_Vielecke/Isoper_Vielecke.htm
Das ist eine diskrete Version des isoperimetrischen Problems.