

Hans Walser, [20070901a]

## Zyklische Fibonacci-Folgen

Anregung: [Weihmann 1996]

### 1 Worum es geht

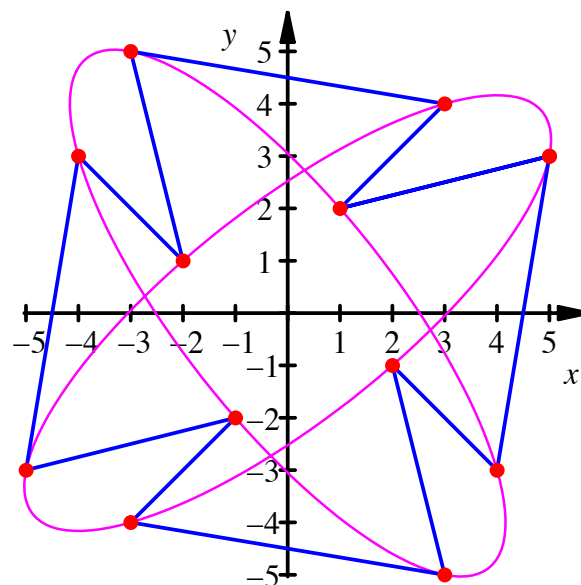
In [Weihmann 1996, S. 5] wird gezeigt, dass die in  $\mathbb{C}$  definierte Rekursion

$$z_{j+2} = i z_{j+1} + z_j$$

stets einen Zwölfer-Zyklus ergibt. Mit den allgemeinen Startwerten  $z_0 = p + iq$  und  $z_1 = r + is$  gilt nämlich:

$$\begin{aligned} z[0] &= p + I*q \\ z[1] &= r + I*s \\ z[2] &= p + I*q + I*r - s \\ z[3] &= I*p - q \\ z[4] &= I*r - s \\ z[5] &= I*p - q - r - I*s \\ z[6] &= -p - I*q \\ z[7] &= -r - I*s \\ z[8] &= s - I*q - I*r - p \\ z[9] &= q - I*p \\ z[10] &= s - I*r \\ z[11] &= q - I*p + r + I*s \\ z[12] &= p + I*q \\ z[13] &= r + I*s \end{aligned}$$

So erhalten wir etwa mit den Startwerten  $z_0 = 5 + 3i$  und  $z_1 = 1 + 2i$  in der Gaußschen Zahlenebene die folgende Figur:



**Zyklische Figur**

Die Punkte liegen offenbar alternierend auf zwei Ellipsen.

Wir können dieses Beispiel auf beliebige geradzahlige Zykluslängen verallgemeinern.

## 2 Zykluslänge $n$

Es sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$  und  $\phi = \frac{2\pi}{n}$ . Dann führt die reelle Rekursion

$$a_{j+2} = 2\cos(\phi) a_{j+1} - a_j$$

bei beliebigen Startwerten zu einer Folge mit der Zykluslänge  $n$ .

Beweis:

Für die  $n$ -ten Einheitswurzeln  $e_j = e^{ij\phi} = \cos(j\phi) + i \sin(j\phi)$  gilt:

$$e_{j+2} = 2\cos(\phi) e_{j+1} - e_j$$

Dies kann durch Einsetzen verifiziert werden:

$$e^{i(j+2)\phi} \stackrel{?}{=} 2\cos(\phi) e^{i(j+1)\phi} - e^{ij\phi}$$

$$e^{i2\phi} \stackrel{?}{=} 2\cos(\phi) e^{i\phi} - 1$$

$$\cos(2\phi) + i \sin(2\phi) \stackrel{?}{=} 2\cos(\phi) (\cos(\phi) + i \sin(\phi)) - 1$$

$$2\cos^2(\phi) - 1 + 2i \cos(\phi) \sin(\phi) \stackrel{?}{=} 2\cos^2(\phi) + 2i \cos(\phi) \sin(\phi) - 1$$

Die Rekursion  $a_{j+2} = 2\cos(\phi) a_{j+1} - a_j$  liefert also mit den Startwerten  $a_0 = e_0 = 1$  und  $a_1 = e_1 = e^{i\phi}$  genau die  $n$ -ten Einheitswurzeln  $a_j = e_j = e^{ij\phi}$ . Die Folge ist zyklisch mit der Zykluslänge  $n$ ; und in der Gaußschen Ebene erhalten wir das reguläre  $n$ -Eck.

Zu zwei beliebigen Startwerten  $a_0$  und  $a_1$  verwenden wir nun die affine Abbildung  $\alpha$  mit dem Fixpunkt im Ursprung, welche durch  $a_0 = \alpha(e_0)$  und  $a_1 = \alpha(e_1)$  definiert ist. Da die Rekursion  $a_{j+2} = 2\cos(\phi) a_{j+1} - a_j$  affin invariant ist, erhalten wir:

$$a_j = \alpha(e_j), j = 2, 3, 4, \dots$$

Die Folge  $\{a_j\}$  ist also ebenfalls zyklisch mit der Zykluslänge  $n$ . Die Punkte  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  bilden in der Gaußschen Ebene ein affin-reguläres  $n$ -Eck (affines Bild eines regulären  $n$ -Eckes).

### 2.1 Bemerkungen

#### 2.1.1 Reelle Rekursion

Die Rekursion  $a_{j+2} = 2\cos(\phi) a_{j+1} - a_j$  ist reell; mit reellen Startwerten erhalten wir eine reelle zyklische Folge.

#### 2.1.2 Affine Abbildung

Mit den Startwerten  $a_0 = p + iq$  und  $a_1 = r + is$  ist die affine Abbildung  $\alpha$  durch folgende Matrix gegeben:

$$\alpha: A = \begin{bmatrix} p & \frac{r-p \cos(\phi)}{\sin(\phi)} \\ q & \frac{s-q \cos(\phi)}{\sin(\phi)} \end{bmatrix}$$

### 2.1.3 Außenellipse

Das affine Bild des Einheitskreises wird zur Außenellipse des affin-regulären  $n$ -Eckes. Diese Ellipse hat die Parameterdarstellung:

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= p \cos(t) + \frac{r-p \cos(\phi)}{\sin(\phi)} \sin(t) \\ y(t) &= q \cos(t) + \frac{s-q \cos(\phi)}{\sin(\phi)} \sin(t) \end{aligned} \right\} t \in [0, 2\pi]$$

## 2.2 Beispiel

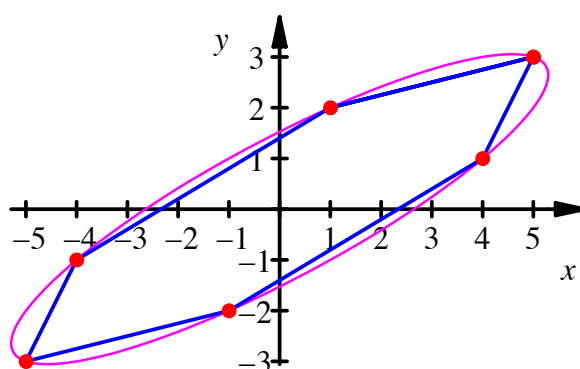
Für  $n = 6$  ist  $\phi = \frac{\pi}{3}$  und  $\cos(\phi) = \frac{1}{2}$ . Wir haben also die Rekursion:

$$a_{j+2} = a_{j+1} - a_j$$

Mit den allgemeinen Startwerten  $a_0 = p + iq$  und  $a_1 = r + is$  gilt:

$$\begin{aligned} a[0] &= p + I*q \\ a[1] &= r + I*s \\ a[2] &= r - I*q - p + I*s \\ a[3] &= -p - I*q \\ a[4] &= -r - I*s \\ a[5] &= p + I*q - r - I*s \\ a[6] &= p + I*q \\ a[7] &= r + I*s \end{aligned}$$

Insbesondere erhalten wir mit den Startwerten  $a_0 = 5 + 3i$  und  $a_1 = 1 + 2i$  in der Gaußschen Zahlenebene die folgende Figur:



Affin-reguläres Sechseck

### 3 Zyklenlänge $2n$

Zu  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$  sei nun  $\psi = \frac{\pi}{n}$ ; es ist also  $2\psi = \phi$ . Dann führt die in  $\mathbb{C}$  definierte Rekursion

$$z_{j+2} = 2i \sin(\psi) z_{j+1} + z_j$$

bei beliebigen Startwerten zu einer Folge mit der Zyklenlänge  $2n$ .

Beweis:

Wir berechnen  $z_{j+4}$  in Abhängigkeit von  $z_{j+2}$  und  $z_j$ . Zunächst ist:

$$z_{j+3} = 2i \sin(\psi) z_{j+2} + z_{j+1}$$

$$z_{j+4} = 2i \sin(\psi) (2i \sin(\psi) z_{j+2} + z_{j+1}) + z_{j+2} = z_{j+2} (1 - 4 \sin^2(\psi)) + 2i \sin(\psi) z_{j+1}$$

Aus der Rekursion  $z_{j+2} = 2i \sin(\psi) z_{j+1} + z_j$  ergibt sich:

$$2i \sin(\psi) z_{j+1} = z_{j+2} - z_j$$

Wir setzen dies oben ein und erhalten:

$$z_{j+4} = z_{j+2} (1 - 4 \sin^2(\psi)) + z_{j+2} - z_j = z_{j+2} (2 - 4 \sin^2(\psi)) - z_j$$

Nun ist aber:

$$2 - 4 \sin^2(\psi) = 2(1 - 2 \sin^2(\psi)) = 2 \cos(2\psi) = 2 \cos(\phi)$$

Somit haben wir bei Schrittlänge 2 die reelle Rekursion:

$$z_{j+4} = 2 \cos(\phi) z_{j+2} - z_j$$

Das entspricht aber der oben besprochenen Rekursion  $a_{j+2} = 2 \cos(\phi) a_{j+1} - a_j$ . Daher sind die Teilfolgen  $z_0, z_2, z_4, \dots$  (gerade Indizes) und  $z_1, z_3, z_5, \dots$  (ungerade Indizes) je zyklisch mit der Zyklenlänge  $n$ . In der Gaußschen Ebene bilden sie je ein affin-reguläres  $n$ -Eck und liegen auf einer Ellipse.

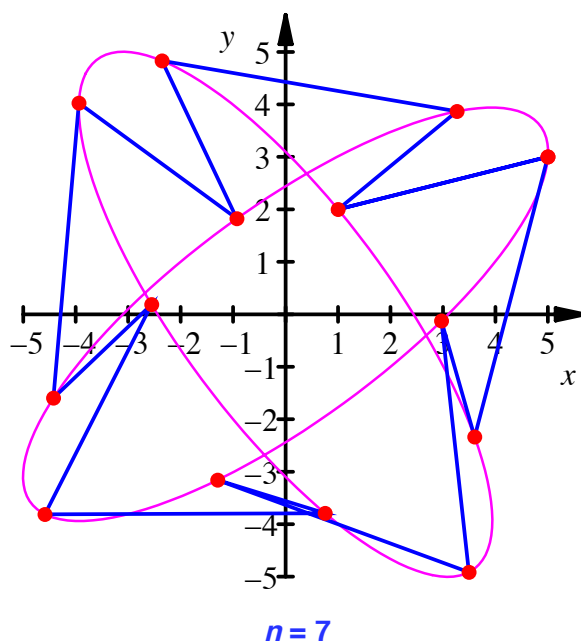
Die Gesamtfolge  $z_0, z_1, z_2, \dots$  ist zyklisch mit der Zyklenlänge  $2n$ .

#### 3.1 Beispiel $n = 6$

Für  $n = 6$  ist  $\sin(\psi) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ . Wir erhalten die in [Weihmann 1996] und im Eingangsbeispiel besprochene Rekursion  $z_{j+2} = i z_{j+1} + z_j$ .

### 3.2 Beispiel $n = 7$

Für  $n = 7$  und die Startwerte  $z_0 = 5 + 3i$  und  $z_1 = 1 + 2i$  erhalten wir:



Die Punkte liegen abwechselungsweise auf zwei Ellipsen; die Figur hat aber keine Symmetrien.

Die Beispiele zeigen, dass diese beiden Ellipsen immer kongruent und um  $\frac{\pi}{2}$  verdreht sind. Dies konnte ich bis jetzt nicht beweisen.

#### Literatur

[Weihmann 1996] Weihmann, Christopher: FIBONACCI-Folgen im komplexen Zahlbereich. Mathematisch-physikalische Korrespondenz, Nr. 187, Weihnachten 1996, S. 3-26