

Fibonacci und Dividieren

1 Die Formel

Es sei a_n die verallgemeinerte Fibonacci-Folge mit der Rekursion

$$a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$$

und den Startwerten $a_1 = 0$ und $a_2 = 1$.

Dann ist:

$$s = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{10^i} = \frac{1}{100-10p-q}$$

2 Beispiele

2.1 $p = 8, q = 3$

> restart:

n:=200:

p:=8: q:=3:

infolevel[all]:=3:

a:=array(1..n):

a[1]:=0: a[2]:=1:

for i from 1 to n-2 do a[i+2]:=p*a[i+1]+q*a[i]: od:

s:=0:

for i from 1 to n-2 do s:=s+a[i]/10^i: od:

s:=evalf(s):

userinfo(3,all,`s =`,s);

userinfo(3,all,`Sollwert =`,1/(100-10*p-q),`=`,evalf(1/(100-10*p-q)));

s = .5882352941e-1

Sollwert = 1/17 = .5882352941e-1

2.2 $p = 1, q = 1$

In diesem Beispiel erhalten wir die klassische Fibonacci-Folge, die in den ersten Ziffern (und unter Berücksichtigung der Überträge auch in den folgenden Ziffern) der Dezimalentwicklung von $\frac{1}{89} = 0.01123595506\dots$ auszumachen ist:

$$\begin{array}{rcccccccc}
 100s & = & \frac{100a_1}{10} & + & \frac{100a_2}{100} & + & \frac{100a_3}{1000} & + & \frac{100a_4}{10000} & + & \frac{100a_5}{100000} & + & \dots \\
 -10ps & = & & - & \frac{10pa_1}{10} & - & \frac{10pa_2}{100} & - & \frac{10pa_3}{1000} & - & \frac{10pa_4}{10000} & - & \dots \\
 -qs & = & & & & - & \frac{qa_1}{10} & - & \frac{qa_2}{100} & - & \frac{qa_3}{1000} & - & \dots \\
 \hline
 (100-10p-q)s & = & 0 & + & 1 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & \dots
 \end{array}$$

Die Nullen in den Spalten (mit Ausnahme der zweiten Spalte) sind eine Folge der Rekursion $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$.

4 Bemerkung

Es handelt sich hier um eine Verallgemeinerung entsprechender Summenformeln für geometrische Folgen und Reihen.