Hans Walser, [20090331a]

Teilfolgen der Fibonacci-Folge

1 Worum geht es?

Wir wählen aus der Fibonacci-Folge

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377

Teilfolgen aus und fragen nach deren Rekursionsformel.
Die Ideen gehen auf Édouard Lucas zurück.

2 Beispiele

2.1 Die Fibonacci-Folge

Die Fibonacci-Folge selber hat die Rekursion:

$$\boxed{f_{n+2} = f_{n+1} + f_n}$$

Es gilt die explizite Formel von Binet:

$$f_n = \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\tau^n - (-\rho)^n\right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad \tau = \tfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618, \quad \rho = \tfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0.618$$

Die Fibonacci-Folge ist auch für negative Indizes definiert:

-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
-8	5	-3	2	-1	1	0	1	1	2	3	5	8

2.2 Teilfolgen mit nur jeder zweiten Fibonacci Zahl

Wir wählen aus der Fibonacci-Folge nur jede zweite Zahl aus, erhalten somit die beiden Folgen:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	5	13	34	89	233	610	1597	4181	10946	28657
1	3	8	21	55	144	377	987	2584	6765	17711	46368

Beide Folgen haben dieselbe Rekursion, nämlich: $b_{m+2} = 3b_{m+1} - b_m$

2.3 Teilfolgen mit nur jeder dritten Fibonacci Zahl

Wir wählen aus der Fibonacci-Folge nur jede dritte Zahl aus, erhalten somit die drei Folgen:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	3	13	55	233	987	4181	17711	75025	317811	1346269
1	5	21	89	377	1597	6765	28657	121393	514229	2178309
2	8	34	144	610	2584	10946	46368	196418	832040	3524578

Diese drei Folgen haben dieselbe Rekursion, nämlich: $b_{m+2} = 4b_{m+1} + b_m$

2.4 Teilfolgen mit nur jeder vierten Fibonacci Zahl

Wir wählen aus der Fibonacci-Folge nur jede vierte Zahl aus, erhalten somit die vier Folgen:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	5	34	233	1597	10946	75025	514229	3524578	24157817
1	8	55	377	2584	17711	121393	832040	5702887	39088169
2	13	89	610	4181	28657	196418	1346269	9227465	63245986
3	21	144	987	6765	46368	317811	2178309	14930352	102334155

Die vier Folgen haben dieselbe Rekursion, nämlich: $b_{m+2} = 7b_{m+1} - b_m$

2.5 Zusammenstellung

Wir haben der Reihe nach die Rekursionsformeln:

$$\begin{aligned} f_{n+2} &= f_{n+1} + f_n \\ b_{m+2} &= 3b_{m+1} - b_m \\ b_{m+2} &= 4b_{m+1} + b_m \\ b_{m+2} &= 7b_{m+1} - b_m \end{aligned}$$

Wir vermuten, dass die Formeln im ersten Koeffizienten die Zahlen der Folge

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199	322	521	843

haben und im zweiten Summanden ein alternierendes Vorzeichen. Diese Zahlen sind die Lucas-Zahlen, benannt nach Édouard Lucas (1842–1891). Die Lucas-Zahlen haben dieselbe Rekursion wie die Fibonacci-Zahlen.

Wir prüfen die Vermutung am Beispiel, in welchem wir nur jede fünfte Zahl der Fibonacci-Zahlen nehmen. Diese Teilfolgen müssten der Rekursion $b_{m+2} = 11b_{m+1} + b_m$ genügen. Das sieht so aus:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	8	89	987	10946	121393	1346269	14930352	165580141
1	13	144	1597	17711	196418	2178309	24157817	267914296
2	21	233	2584	28657	317811	3524578	39088169	433494437
3	34	377	4181	46368	514229	5702887	63245986	701408733
5	55	610	6765	75025	832040	9227465	102334155	1134903170

Die Vermutung ist bestätigt.
Wie lassen sich diese Vermutungen beweisen?

3 Beweis

Der Beweis läuft in drei Schritten.

3.1 Die Formel von Binet für die Lucas-Zahlen

Die Lucas-Zahlen l_n lassen sich mit folgender Formel explizit erzeugen:

$$l_n = \left(\tau^n + (-\rho)^n\right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad \tau = \tfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618, \quad \rho = \tfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0.618$$

Beweis induktiv:
(I)

$$l_1 = \left(\tau^1 + (-\rho)^1\right) = \tau - \rho = 1$$
$$l_2 = \left(\tau^2 + (-\rho)^2\right) = \tau^2 + \rho^2 = 3$$

(II)

$$\begin{aligned} l_{n+2} = l_{n+1} + l_n &= \tau^{n+1} + (-\rho)^{n+1} + \tau^n + (-\rho)^n \\ &= \tau^n \underbrace{(\tau+1)}_{\tau^2} + (-\rho)^n \underbrace{(-\rho+1)}_{\rho^2=(-\rho)^2} = \tau^{n+2} + (-\rho)^{n+2} \end{aligned}$$

3.2 Quotientenfolge

3.2.1 Fibonacci-Zahlen

Die Quotienten aufeinander folgender Fibonacci-Zahlen streben gegen den goldenen Schnitt:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \tau$$

Wir können die Fibonacci-Zahlen auch rückwärts laufen lassen und erhalten:

$$\lim_{n \to -\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = -\rho$$

Diese beiden Grenzwerte sind die Lösungen der quadratischen Gleichung:

$$\gamma^2 - \gamma - 1 = 0$$

3.3 Fibonacci-Teilfolgen

Wir wählen aus der Fibonacci-Folge Zahlen im Abstand k aus. Die Quotientenfolge dieser Teilfolge hat die Limites $\gamma_1 = \tau^k$ und $\gamma_2 = (-\rho)^k$. Dies sind die Lösungen der quadratischen Gleichung:

$$\left(\gamma - \tau^k\right)\left(\gamma - (-\rho)^k\right) = 0$$

$$\gamma^2 - \left(\tau^k + (-\rho)^k\right)\gamma + \tau^k(-\rho)^k = 0$$

Vergleich mit $\gamma^2 - p\gamma - q = 0$ liefert:

$$p = \tau^k + (-\rho)^k = l_k$$

$$q = -\tau^k(-\rho)^k = -(-1)^k \underbrace{(\tau\rho)^k}_{1} = -(-1)^k$$

Die Teilfolge hat also die Rekursion:

$$b_{m+2} = l_k b_{m+1} - (-1)^k b_m$$

Damit ist die Vermutung bewiesen.

Die Überlegungen sind unabhängig von den Startwerten der Fibonacci-Folge und gelten daher für jede Folge mit derselben Rekursion.

4 Variante

Wir arbeiten mit der abgeänderten Rekursion:

$$\boxed{a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n}$$

4.1 Die Folge

Aus $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$ ergibt sich mit den Stützwerten $a_1 = 1$ und $a_2 = 3$ die Folge:

-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
99	-41	17	-7	3	-1	1	1	3	7	17	41	99

Die Folge, die übrigens nur aus ungeraden Zahlen besteht, hat die explizite Formel:

$$a_n = \tfrac{1}{2}\left(\left(1+\sqrt{2}\right)^n + \left(1-\sqrt{2}\right)^n\right)$$

Weiter ist:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \sqrt{2} \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to-\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \sqrt{2}$$

4.2 Teilfolgen

Wir wählen jedes zweite Glied der Folge aus:

-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
-8119	-1393	-239	-41	-7	-1	1	7	41	239	1393
3363	577	99	17	3	1	3	17	99	577	3363

Beide Folgen haben dieselbe Rekursion, nämlich: $b_{m+2} = 6b_{m+1} - b_m$

Wir wählen jedes dritte Glied der Folge aus:

-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
114243	-8119	577	-41	3	1	17	239	3363
-47321	3363	-239	17	-1	3	41	577	8119
19601	-1393	99	-7	1	7	99	1393	19601

Diese drei Folgen haben dieselbe Rekursion, nämlich: $b_{m+2} = 14b_{m+1} + b_m$

Wir wählen jedes vierte Glied der Folge aus:

-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
-9369319	-275807	-8119	-239	-7	1	41	1393	47321
3880899	114243	3363	99	3	3	99	3363	114243
-1607521	-47321	-1393	-41	-1	7	239	8119	275807
665857	19601	577	17	1	17	577	19601	665857

Diese vier Folgen haben dieselbe Rekursion, nämlich: $b_{m+2} = 34b_{m+1} - b_m$

4.3 Zusammenstellung und Übersicht

Wir haben der Reihe nach die Rekursionen:

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$$
$$b_{m+2} = 6b_{m+1} - b_m$$
$$b_{m+2} = 14b_{m+1} + b_m$$
$$b_{m+2} = 34b_{m+1} - b_m$$

Beim Summanden mit b_m haben wir alternierende Vorzeichen, beim Summanden mit b_{m+1} bilden die Koeffizienten die Folge

-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
198	-82	34	-14	6	-2	2	2	6	14	34	82	198

Diese den Lucas-Zahlen entsprechende Folge c_n hat ebenfalls die Rekursion:

$$c_{n+2} = 2c_{n+1} + c_n$$

Ihre explizite Formel ist:

$$c_n = \left(1+\sqrt{2}\right)^n + \left(1-\sqrt{2}\right)^n$$

Sie ist das Doppelte der Folge a_n.

Analog zur Fibonacci-Folge kann gezeigt werden, dass für eine Auswahl mit Abstand k aus unserer Folge $a_n = \frac{1}{2}\left(\left(1+\sqrt{2}\right)^n + \left(1-\sqrt{2}\right)^n\right)$ die Rekursion

$$b_{m+2} = c_k b_{m+1} - (-1)^k b_m$$

hat.

5 Verallgemeinerung

Die beiden Beispiele passen ins folgende allgemeine Schema.

5.1 Die Folge

Wir studieren eine Folge mit beliebigen Startwerten und der Rekursion:

$$\boxed{a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n}$$

5.2 Quotientenfolge

Wir bilden die Quotientenfolge $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ und erhalten:

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = p\frac{a_{n+1}}{a_{n+1}} + q\frac{a_n}{a_{n+1}}$$

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = p + q\frac{1}{\frac{a_{n+1}}{a_n}}$$

Für die Grenzwerte $\gamma_{1,2} = \lim\limits_{n\to\pm\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ gilt somit:

$$\gamma = p + q\frac{1}{\gamma}$$

$$\gamma^2 - p\gamma - q = 0$$

Nun seien $\gamma_{1,2}$ die Lösungen dieser Gleichung, also:

$$\gamma_1 = \frac{p+\sqrt{p^2+4q}}{2} \qquad \text{und} \qquad \gamma_2 = \frac{p-\sqrt{p^2+4q}}{2}$$

Damit gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \gamma_1 = \frac{p+\sqrt{p^2+4q}}{2} \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to-\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \gamma_2 = \frac{p-\sqrt{p^2+4q}}{2}$$

Ferner ist (Satz von Vieta):

$$\gamma_1\gamma_2 = \frac{p+\sqrt{p^2+4q}}{2}\,\frac{p-\sqrt{p^2+4q}}{2} = \frac{1}{4}\left(p^2 - \left(p^2+4q\right)\right) = -q$$

5.3 Explizite Formel

Die Folge a_n kann explizit angegeben werden durch:

$$a_n = \alpha\gamma_1^n + \beta\gamma_2^n$$

Die Koeffizienten α und β ergeben sich durch Einsetzen der Startwerte.

5.4 Analogon zu den Lucas-Zahlen

Die Folge

$$c_n = \gamma_1^n + \gamma_2^n$$

ist das Analogon zu den Lucas-Zahlen. Diese Folge ist ein Sonderfall von $a_n = \alpha\gamma_1^n + \beta\gamma_2^n$ und hat dieselbe Rekursion $c_{n+2} = pc_{n+1} + qc_n$. Im Einzelnen ist:

$$\begin{aligned}
c_1 &= p \\
c_2 &= p^2 + 2q \\
c_3 &= p^3 + 3pq \\
c_4 &= p^4 + 4p^2q + 2q^2 \\
c_5 &= p^5 + 5p^3q + 5pq^2 \\
c_6 &= p^6 + 6p^4q + 9p^2q^2 + 2q^3 \\
c_7 &= p^7 + 7p^5q + 14p^3q^2 + 7pq^3
\end{aligned}$$

5.5 Auswahl

Wir wählen nun aus der Folge a_n jedes k-te Element aus und bilden damit die Folge b_m, also:

$$b_m = a_{km+j}, \quad j \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$$

Es gibt also k verschiedene Folgen b_m, je nach Ausgangsindex j.

Dann gilt für die Folgen b_m die Rekursion:

$$b_{m+2} = c_k b_{m+1} - (-q)^k b_m$$

5.6 Beweis

Es ist zu verifizieren:

$$b_{m+2} = c_k b_{m+1} - (-q)^k b_m$$

$$a_{k(m+2)+j} = c_k a_{k(m+1)+j} - (-q)^k a_{km+j}$$

Also:

$$\begin{aligned}
&\alpha\gamma_1^{k(m+2)+j} + \beta\gamma_2^{k(m+2)+j} = \\
&= \left(\gamma_1^k + \gamma_2^k\right)\left(\alpha\gamma_1^{k(m+1)+j} + \beta\gamma_2^{k(m+1)+j}\right) - (-q)^k\left(\alpha\gamma_1^{km+j} + \beta\gamma_2^{km+j}\right) \\
&= \alpha\gamma_1^{k(m+2)+j} + \beta\gamma_1^k\gamma_2^{k(m+1)+j} + \alpha\gamma_1^{k(m+1)+j}\gamma_2^k + \beta\gamma_2^{k(m+2)+j} - (-q)^k\left(\alpha\gamma_1^{km+j} + \beta\gamma_2^{km+j}\right)
\end{aligned}$$

Somit bleibt noch zu verifizieren:

$$0 = \beta\gamma_1^k\gamma_2^{k(m+1)+j} + \alpha\gamma_1^{k(m+1)+j}\gamma_2^k - (-q)^k\left(\alpha\gamma_1^{km+j} + \beta\gamma_2^{km+j}\right)$$

$$0 = (\gamma_1\gamma_2)^k\left(\beta\gamma_2^{km+j} + \alpha\gamma_1^{km+j}\right) - (-q)^k\left(\alpha\gamma_1^{km+j} + \beta\gamma_2^{km+j}\right)$$

Wegen $\gamma_1\gamma_2 = -q$ stimmt das.