

Hans Walser, [20090331a]

Teilfolgen der Fibonacci-Folge

1 Worum geht es?

Wir wählen aus der Fibonacci-Folge

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377

Teilfolgen aus und fragen nach deren Rekursionsformel.

Die Ideen gehen auf Édouard Lucas zurück.

2 Beispiele

2.1 Die Fibonacci-Folge

Die Fibonacci-Folge selber hat die Rekursion:

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$$

Es gilt die explizite Formel von Binet:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\tau^n - (-\rho)^n \right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad \tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618, \quad \rho = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0.618$$

Die Fibonacci-Folge ist auch für negative Indizes definiert:

-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
-8	5	-3	2	-1	1	0	1	1	2	3	5	8

2.2 Teilfolgen mit nur jeder zweiten Fibonacci Zahl

Wir wählen aus der Fibonacci-Folge nur jede zweite Zahl aus, erhalten somit die beiden Folgen:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	5	13	34	89	233	610	1597	4181	10946	28657
1	3	8	21	55	144	377	987	2584	6765	17711	46368

Beide Folgen haben dieselbe Rekursion, nämlich: $b_{m+2} = 3b_{m+1} - b_m$

2.3 Teilfolgen mit nur jeder dritten Fibonacci Zahl

Wir wählen aus der Fibonacci-Folge nur jede dritte Zahl aus, erhalten somit die drei Folgen:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	3	13	55	233	987	4181	17711	75025	317811	1346269
1	5	21	89	377	1597	6765	28657	121393	514229	2178309
2	8	34	144	610	2584	10946	46368	196418	832040	3524578

Diese drei Folgen haben dieselbe Rekursion, nämlich: $b_{m+2} = 4b_{m+1} + b_m$

2.4 Teilfolgen mit nur jeder vierten Fibonacci Zahl

Wir wählen aus der Fibonacci-Folge nur jede vierte Zahl aus, erhalten somit die vier Folgen:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	5	34	233	1597	10946	75025	514229	3524578	24157817
1	8	55	377	2584	17711	121393	832040	5702887	39088169
2	13	89	610	4181	28657	196418	1346269	9227465	63245986
3	21	144	987	6765	46368	317811	2178309	14930352	102334155

Die vier Folgen haben dieselbe Rekursion, nämlich: $b_{m+2} = 7b_{m+1} - b_m$

2.5 Zusammenstellung

Wir haben der Reihe nach die Rekursionsformeln:

$$\begin{aligned}
 f_{n+2} &= f_{n+1} + f_n \\
 b_{m+2} &= 3b_{m+1} - b_m \\
 b_{m+2} &= 4b_{m+1} + b_m \\
 b_{m+2} &= 7b_{m+1} - b_m
 \end{aligned}$$

Wir vermuten, dass die Formeln im ersten Koeffizienten die Zahlen der Folge

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199	322	521	843

haben und im zweiten Summanden ein alternierendes Vorzeichen. Diese Zahlen sind die Lucas-Zahlen, benannt nach Édouard Lucas (1842–1891). Die Lucas-Zahlen haben dieselbe Rekursion wie die Fibonacci-Zahlen.

Wir prüfen die Vermutung am Beispiel, in welchem wir nur jede fünfte Zahl der Fibonacci-Zahlen nehmen. Diese Teilfolgen müssten der Rekursion $b_{m+2} = 11b_{m+1} + b_m$ genügen. Das sieht so aus:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	8	89	987	10946	121393	1346269	14930352	165580141
1	13	144	1597	17711	196418	2178309	24157817	267914296
2	21	233	2584	28657	317811	3524578	39088169	433494437
3	34	377	4181	46368	514229	5702887	63245986	701408733
5	55	610	6765	75025	832040	9227465	102334155	1134903170

Die Vermutung ist bestätigt.

Wie lassen sich diese Vermutungen beweisen?

3 Beweis

Der Beweis läuft in drei Schritten.

3.1 Die Formel von Binet für die Lucas-Zahlen

Die Lucas-Zahlen l_n lassen sich mit folgender Formel explizit erzeugen:

$$l_n = \left(\tau^n + (-\rho)^n \right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad \tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618, \quad \rho = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0.618$$

Beweis induktiv:

(I)

$$l_1 = \left(\tau^1 + (-\rho)^1 \right) = \tau - \rho = 1$$

$$l_2 = \left(\tau^2 + (-\rho)^2 \right) = \tau^2 + \rho^2 = 3$$

(II)

$$\begin{aligned} l_{n+2} &= l_{n+1} + l_n = \tau^{n+1} + (-\rho)^{n+1} + \tau^n + (-\rho)^n \\ &= \tau^n \underbrace{(\tau + 1)}_{\tau^2} + (-\rho)^n \underbrace{(-\rho + 1)}_{\rho^2 = (-\rho)^2} = \tau^{n+2} + (-\rho)^{n+2} \end{aligned}$$

3.2 Quotientenfolge

3.2.1 Fibonacci-Zahlen

Die Quotienten aufeinander folgender Fibonacci-Zahlen streben gegen den goldenen Schnitt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \tau$$

Wir können die Fibonacci-Zahlen auch rückwärts laufen lassen und erhalten:

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = -\rho$$

Diese beiden Grenzwerte sind die Lösungen der quadratischen Gleichung:

$$\gamma^2 - \gamma - 1 = 0$$

3.3 Fibonacci-Teilfolgen

Wir wählen aus der Fibonacci-Folge Zahlen im Abstand k aus. Die Quotientenfolge dieser Teilfolge hat die Limes $\gamma_1 = \tau^k$ und $\gamma_2 = (-\rho)^k$. Dies sind die Lösungen der quadratischen Gleichung:

$$\begin{aligned}(\gamma - \tau^k)(\gamma - (-\rho)^k) &= 0 \\ \gamma^2 - (\tau^k + (-\rho)^k)\gamma + \tau^k(-\rho)^k &= 0\end{aligned}$$

Vergleich mit $\gamma^2 - p\gamma - q = 0$ liefert:

$$\begin{aligned}p &= \tau^k + (-\rho)^k = l_k \\ q &= -\tau^k(-\rho)^k = -(-1)^k \underbrace{(\tau\rho)^k}_1 = -(-1)^k\end{aligned}$$

Die Teilfolge hat also die Rekursion:

$$b_{m+2} = l_k b_{m+1} - (-1)^k b_m$$

Damit ist die Vermutung bewiesen.

Die Überlegungen sind unabhängig von den Startwerten der Fibonacci-Folge und gelten daher für jede Folge mit derselben Rekursion.

4 Variante

Wir arbeiten mit der abgeänderten Rekursion:

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$$

4.1 Die Folge

Aus $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$ ergibt sich mit den Stützwerten $a_1 = 1$ und $a_2 = 3$ die Folge:

-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
99	-41	17	-7	3	-1	1	1	3	7	17	41	99

Die Folge, die übrigens nur aus ungeraden Zahlen besteht, hat die explizite Formel:

$$a_n = \frac{1}{2} \left((1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n \right)$$

Weiter ist:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \sqrt{2} \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \sqrt{2}$$

4.2 Teilfolgen

Wir wählen jedes zweite Glied der Folge aus:

-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
-8119	-1393	-239	-41	-7	-1	1	7	41	239	1393
3363	577	99	17	3	1	3	17	99	577	3363

Beide Folgen haben dieselbe Rekursion, nämlich: $b_{m+2} = 6b_{m+1} - b_m$

Wir wählen jedes dritte Glied der Folge aus:

-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
114243	-8119	577	-41	3	1	17	239	3363
-47321	3363	-239	17	-1	3	41	577	8119
19601	-1393	99	-7	1	7	99	1393	19601

Diese drei Folgen haben dieselbe Rekursion, nämlich: $b_{m+2} = 14b_{m+1} + b_m$

Wir wählen jedes vierte Glied der Folge aus:

-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
-9369319	-275807	-8119	-239	-7	1	41	1393	47321
3880899	114243	3363	99	3	3	99	3363	114243
-1607521	-47321	-1393	-41	-1	7	239	8119	275807
665857	19601	577	17	1	17	577	19601	665857

Diese vier Folgen haben dieselbe Rekursion, nämlich: $b_{m+2} = 34b_{m+1} - b_m$

4.3 Zusammenstellung und Übersicht

Wir haben der Reihe nach die Rekursionen:

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$$

$$b_{m+2} = 6b_{m+1} - b_m$$

$$b_{m+2} = 14b_{m+1} + b_m$$

$$b_{m+2} = 34b_{m+1} - b_m$$

Beim Summanden mit b_m haben wir alternierende Vorzeichen, beim Summanden mit b_{m+1} bilden die Koeffizienten die Folge

-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
198	-82	34	-14	6	-2	2	2	6	14	34	82	198

Diese den Lucas-Zahlen entsprechende Folge c_n hat ebenfalls die Rekursion:

$$c_{n+2} = 2c_{n+1} + c_n$$

Ihre explizite Formel ist:

$$c_n = (1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n$$

Sie ist das Doppelte der Folge a_n .

Analog zur Fibonacci-Folge kann gezeigt werden, dass für eine Auswahl mit Abstand k aus unserer Folge $a_n = \frac{1}{2} \left((1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n \right)$ die Rekursion

$$b_{m+2} = c_k b_{m+1} - (-1)^k b_m$$

hat.

5 Verallgemeinerung

Die beiden Beispiele passen ins folgende allgemeine Schema.

5.1 Die Folge

Wir studieren eine Folge mit beliebigen Startwerten und der Rekursion:

$$\boxed{a_{n+2} = p a_{n+1} + q a_n}$$

5.2 Quotientenfolge

Wir bilden die Quotientenfolge $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ und erhalten:

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = p \frac{a_{n+1}}{a_{n+1}} + q \frac{a_n}{a_{n+1}}$$

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = p + q \frac{1}{\frac{a_{n+1}}{a_n}}$$

Für die Grenzwerte $\gamma_{1,2} = \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ gilt somit:

$$\gamma = p + q \frac{1}{\gamma}$$

$$\gamma^2 - p\gamma - q = 0$$

Nun seien $\gamma_{1,2}$ die Lösungen dieser Gleichung, also:

$$\gamma_1 = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2} \quad \text{und} \quad \gamma_2 = \frac{p - \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$$

Damit gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \gamma_1 = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2} \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \gamma_2 = \frac{p - \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$$

Ferner ist (Satz von Vieta):

$$\gamma_1 \gamma_2 = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2} \frac{p - \sqrt{p^2 + 4q}}{2} = \frac{1}{4} \left(p^2 - (p^2 + 4q) \right) = -q$$

5.3 Explizite Formel

Die Folge a_n kann explizit angegeben werden durch:

$$a_n = \alpha\gamma_1^n + \beta\gamma_2^n$$

Die Koeffizienten α und β ergeben sich durch Einsetzen der Startwerte.

5.4 Analogon zu den Lucas-Zahlen

Die Folge

$$c_n = \gamma_1^n + \gamma_2^n$$

ist das Analogon zu den Lucas-Zahlen. Diese Folge ist ein Sonderfall von $a_n = \alpha\gamma_1^n + \beta\gamma_2^n$ und hat dieselbe Rekursion $c_{n+2} = pc_{n+1} + qc_n$. Im Einzelnen ist:

$$c_1 = p$$

$$c_2 = p^2 + 2q$$

$$c_3 = p^3 + 3pq$$

$$c_4 = p^4 + 4p^2q + 2q^2$$

$$c_5 = p^5 + 5p^3q + 5pq^2$$

$$c_6 = p^6 + 6p^4q + 9p^2q^2 + 2q^3$$

$$c_7 = p^7 + 7p^5q + 14p^3q^2 + 7pq^3$$

5.5 Auswahl

Wir wählen nun aus der Folge a_n jedes k -te Element aus und bilden damit die Folge b_m , also:

$$b_m = a_{km+j}, \quad j \in \{0, 1, \dots, k-1\}$$

Es gibt also k verschiedene Folgen b_m , je nach Ausgangsindex j .

Dann gilt für die Folgen b_m die Rekursion:

$$b_{m+2} = c_k b_{m+1} - (-q)^k b_m$$

5.6 Beweis

Es ist zu verifizieren:

$$b_{m+2} = c_k b_{m+1} - (-q)^k b_m$$

$$a_{k(m+2)+j} = c_k a_{k(m+1)+j} - (-q)^k a_{km+j}$$

Also:

$$\alpha\gamma_1^{k(m+2)+j} + \beta\gamma_2^{k(m+2)+j} =$$

$$= (\gamma_1^k + \gamma_2^k) (\alpha\gamma_1^{k(m+1)+j} + \beta\gamma_2^{k(m+1)+j}) - (-q)^k (\alpha\gamma_1^{km+j} + \beta\gamma_2^{km+j})$$

$$= \alpha\gamma_1^{k(m+2)+j} + \beta\gamma_1^k \gamma_2^{k(m+1)+j} + \alpha\gamma_1^{k(m+1)+j} \gamma_2^k + \beta\gamma_2^{k(m+2)+j} - (-q)^k (\alpha\gamma_1^{km+j} + \beta\gamma_2^{km+j})$$

Somit bleibt noch zu verifizieren:

$$0 = \beta\gamma_1^k\gamma_2^{k(m+1)+j} + \alpha\gamma_1^{k(m+1)+j}\gamma_2^k - (-q)^k(\alpha\gamma_1^{km+j} + \beta\gamma_2^{km+j})$$

$$0 = (\gamma_1\gamma_2)^k(\beta\gamma_2^{km+j} + \alpha\gamma_1^{km+j}) - (-q)^k(\alpha\gamma_1^{km+j} + \beta\gamma_2^{km+j})$$

Wegen $\gamma_1\gamma_2 = -q$ stimmt das.