

Hans Walser, [20150823]

## Fibonacci-Potenzen

### 1 Worum geht es

Es werden die Quadrate, Kuben und vierte Potenzen der Folgen mit der Fibonacci-Rekursion behandelt. Insbesondere kommen die Fibonacci-Folge und die Lucas-Folge vor.

### 2 Quadrate

#### 2.1 Rekursion für Quadrate der Fibonacci Zahlen

Aus der Formel von Binet

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \Phi^n - \left(-\frac{1}{\Phi}\right)^n \right), \quad \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad (1)$$

erhalten wir:

$$F_n^2 = \frac{1}{5} \left( \Phi^{2n} - 2(-1)^n + \Phi^{-2n} \right) \quad (2)$$

Behauptung: Es gilt folgende Rekursion:

$$F_{n+1}^2 = 2F_n^2 + 2F_{n-1}^2 - F_{n-2}^2 \quad (3)$$

Beweis: Nachrechnen unter Verwendung von (2).

#### 2.2 Beginn mit Rekursion

Eine beliebige Folge  $a_n$  habe die Rekursion:

$$a_{n+1} = 2a_n + 2a_{n-1} - a_{n-2} \quad (4)$$

Daraus ergibt sich:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2 + 2 \frac{a_{n-1}}{a_n} - \frac{a_{n-2}}{a_n} = 2 + 2 \frac{a_{n-1}}{a_n} - \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} \frac{a_{n-1}}{a_n} \quad (5)$$

Für den Grenzwert

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad (6)$$

finden wir die kubische Gleichung:

$$\begin{aligned}\alpha &= 2 + 2\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} \\ \alpha^3 - 2\alpha^2 - 2\alpha + 1 &= 0\end{aligned}\tag{7}$$

Diese hat die Lösungen:

$$\alpha_1 = \Phi^2, \quad \alpha_2 = \left(\frac{1}{\Phi}\right)^2, \quad \alpha_3 = -1\tag{8}$$

Somit gilt für die Folge  $a_n$  die verallgemeinerte Binet-Formel:

$$a_n = r_1\Phi^{2n} + r_2\left(\frac{1}{\Phi}\right)^{2n} + r_3(-1)^n\tag{9}$$

## 2.3 Beispiele

### 2.3.1 Quadrate der Fibonacci-Folge

Fibonacci-Folge:

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$F_n$	0	1	1	2	3	5	8	13	21

**Tab. 1: Fibonacci-Folge**

Wir arbeiten mit den Startwerten:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 1\tag{10}$$

Für die Koeffizienten  $r_1, r_2, r_3$  erhalten wir die Bedingung:

$$\begin{aligned}0 &= r_1\Phi^0 + r_2\left(\frac{1}{\Phi}\right)^0 + r_3(-1)^0 \\ 1 &= r_1\Phi^2 + r_2\left(\frac{1}{\Phi}\right)^2 + r_3(-1)^1 \\ 1 &= r_1\Phi^4 + r_2\left(\frac{1}{\Phi}\right)^4 + r_3(-1)^2\end{aligned}\tag{11}$$

Das Gleichungssystem (11) hat die Lösung:

$$r_1 = \frac{1}{5}, \quad r_2 = \frac{1}{5}, \quad r_3 = -\frac{2}{5} \quad (12)$$

Dies ergibt die Formel (2).

### 2.3.2 Quadrate der Lucas-Folge

Lucas-Folge:

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$L_n$	2	1	3	4	7	11	18	29	47

**Tab. 2: Lucas-Folge**

Wir arbeiten mit den Startwerten:

$$a_0 = 4, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 9 \quad (13)$$

Für die Koeffizienten  $r_1, r_2, r_3$  erhalten wir die Bedingung:

$$\begin{aligned} 4 &= r_1 \Phi^0 + r_2 \left(\frac{1}{\Phi}\right)^0 + r_3 (-1)^0 \\ 1 &= r_1 \Phi^2 + r_2 \left(\frac{1}{\Phi}\right)^2 + r_3 (-1)^1 \\ 9 &= r_1 \Phi^4 + r_2 \left(\frac{1}{\Phi}\right)^4 + r_3 (-1)^2 \end{aligned} \quad (14)$$

Das Gleichungssystem (14) hat die Lösung:

$$r_1 = 1, \quad r_2 = 1, \quad r_3 = 2 \quad (15)$$

Dies ergibt für die Quadrate der Lucas-Folge die besonders einfache Formel:

$$L_n^2 = \Phi^{2n} + \left(\frac{1}{\Phi}\right)^{2n} + 2(-1)^n = \left(\Phi^n + \left(-\frac{1}{\Phi}\right)^n\right)^2 \quad (16)$$

Und tatsächlich:

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$a_n$	4	1	9	16	49	121	324	841	2209

**Tab. 3: Quadrate der Lucas-Folge**

Aus (16) ergibt sich die Binet-Formel für die Lucas-Folge:

$$L_n = \Phi^n + \left(-\frac{1}{\Phi}\right)^n \quad (17)$$

### 3 Kuben

Und nun dasselbe für die Kuben.

#### 3.1 Rekursion für die Kuben der Fibonacci Zahlen

Es gilt die Rekursion:

$$F_{n+1}^3 = 3F_n^3 + 6F_{n-1}^3 - 3F_{n-2}^3 - F_{n-3}^3 \quad (18)$$

#### 3.2 Beginn mit der Rekursion

Eine beliebige Folge  $b_n$  habe die Rekursion:

$$b_{n+1} = 3b_n + 6b_{n-1} - 3b_{n-2} - b_{n-3} \quad (19)$$

Für den Grenzwert

$$\beta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} \quad (20)$$

finden wir die Gleichung vierten Grades:

$$\begin{aligned} \beta &= 3 + 6\frac{1}{\beta} - 3\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\beta^3} \\ \beta^4 - 3\beta^3 - 6\beta^2 + 3\beta + 1 &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

Diese hat die Lösungen:

$$\beta_1 = \frac{1}{\Phi}, \quad \beta_2 = (-\Phi), \quad \beta_3 = -\left(\frac{1}{\Phi}\right)^3, \quad \beta_4 = \Phi^3 \quad (22)$$

Somit gilt für die Folge  $b_n$  die verallgemeinerte Binet-Formel:

$$b_n = r_1 \left(\frac{1}{\Phi}\right)^n + r_2 (-\Phi)^n + r_3 \left(-\left(\frac{1}{\Phi}\right)^3\right)^n + r_4 (\Phi^3)^n \quad (23)$$

### 3.3 Beispiele

#### 3.3.1 Kuben der Fibonacci-Folge

Wir arbeiten mit den Startwerten:

$$b_0 = 0, \quad b_1 = 1, \quad b_2 = 1, \quad b_3 = 8 \quad (24)$$

Für die Koeffizienten  $r_1, r_2, r_3, r_4$  erhalten wir die Bedingung:

$$\begin{aligned} 0 &= r_1 \left(\frac{1}{\Phi}\right)^0 + r_2 (-\Phi)^0 + r_3 \left(-\left(\frac{1}{\Phi}\right)^3\right)^0 + r_4 (\Phi^3)^0 \\ 1 &= r_1 \left(\frac{1}{\Phi}\right)^1 + r_2 (-\Phi)^1 + r_3 \left(-\left(\frac{1}{\Phi}\right)^3\right)^1 + r_4 (\Phi^3)^1 \\ 1 &= r_1 \left(\frac{1}{\Phi}\right)^2 + r_2 (-\Phi)^2 + r_3 \left(-\left(\frac{1}{\Phi}\right)^3\right)^2 + r_4 (\Phi^3)^2 \\ 8 &= r_1 \left(\frac{1}{\Phi}\right)^3 + r_2 (-\Phi)^3 + r_3 \left(-\left(\frac{1}{\Phi}\right)^3\right)^3 + r_4 (\Phi^3)^3 \end{aligned} \quad (25)$$

Das Gleichungssystem (25) hat die Lösung:

$$r_1 = \frac{3}{25}\sqrt{5}, \quad r_2 = -\frac{3}{25}\sqrt{5}, \quad r_3 = -\frac{1}{25}\sqrt{5}, \quad r_4 = \frac{1}{25}\sqrt{5} \quad (26)$$

Dies ergibt die Formel:

$$\begin{aligned} F_n^3 &= 3\frac{\sqrt{5}}{25}\left(\frac{1}{\Phi}\right)^n - 3\frac{\sqrt{5}}{25}(-\Phi)^n - \frac{\sqrt{5}}{25}\left(-\left(\frac{1}{\Phi}\right)^3\right)^n + \frac{\sqrt{5}}{25}(\Phi^3)^n \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}^3} \left( (\Phi^n) - \left(-\frac{1}{\Phi}\right)^n \right)^3 \end{aligned} \quad (27)$$

### 3.3.2 Kuben der Lucas-Folge

Wir arbeiten mit den Startwerten:

$$b_0 = 8, \quad b_1 = 1, \quad b_2 = 27, \quad b_3 = 64 \quad (28)$$

Für die Koeffizienten  $r_1, r_2, r_3, r_4$  erhalten wir die Bedingung:

$$\begin{aligned} 8 &= r_1 \left(\frac{1}{\Phi}\right)^0 + r_2 (-\Phi)^0 + r_3 \left(-\left(\frac{1}{\Phi}\right)^3\right)^0 + r_4 (\Phi^3)^0 \\ 1 &= r_1 \left(\frac{1}{\Phi}\right)^1 + r_2 (-\Phi)^1 + r_3 \left(-\left(\frac{1}{\Phi}\right)^3\right)^1 + r_4 (\Phi^3)^1 \\ 27 &= r_1 \left(\frac{1}{\Phi}\right)^2 + r_2 (-\Phi)^2 + r_3 \left(-\left(\frac{1}{\Phi}\right)^3\right)^2 + r_4 (\Phi^3)^2 \\ 64 &= r_1 \left(\frac{1}{\Phi}\right)^3 + r_2 (-\Phi)^3 + r_3 \left(-\left(\frac{1}{\Phi}\right)^3\right)^3 + r_4 (\Phi^3)^3 \end{aligned} \quad (29)$$

Das Gleichungssystem (29) hat die Lösung:

$$r_1 = 3, \quad r_2 = 3, \quad r_3 = 1, \quad r_4 = 1 \quad (30)$$

Dies ergibt die Formel:

$$L_n^3 = 3\left(\frac{1}{\Phi}\right)^n + 3(-\Phi)^n + \left(-\left(\frac{1}{\Phi}\right)^3\right)^n + (\Phi^3)^n = \left(\left(\Phi^n\right) + \left(-\frac{1}{\Phi}\right)^n\right)^3 \quad (31)$$

## 4 Vierte Potenzen

Und nun dasselbe für die vierten Potenzen.

### 4.1 Rekursion für die Kuben der Fibonacci Zahlen

Es gilt die Rekursion:

$$F_{n+1}^4 = 5F_n^4 + 15F_{n-1}^4 - 15F_{n-2}^4 - 5F_{n-3}^4 + F_{n-4}^4 \quad (32)$$

### 4.2 Beginn mit der Rekursion

Eine beliebige Folge  $c_n$  habe die Rekursion:

$$c_{n+1} = 5c_n + 15c_{n-1} - 15c_{n-2} - 5c_{n-3} + c_{n-4} \quad (33)$$

Für den Grenzwert

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} \quad (34)$$

finden wir die Gleichung fünften Grades:

$$\begin{aligned} \gamma &= 5 + 15\frac{1}{\gamma} - 15\frac{1}{\gamma^2} - 5\frac{1}{\gamma^3} + \frac{1}{\gamma^4} \\ \gamma^5 - 5\gamma^4 - 15\gamma^3 + 15\gamma^2 + 5\gamma - 1 &= 0 \end{aligned} \quad (35)$$

Diese hat die Lösungen:

$$\gamma_1 = 1, \quad \gamma_2 = -\left(\frac{1}{\Phi}\right)^2, \quad \gamma_3 = -\Phi^2, \quad \gamma_4 = \left(\frac{1}{\Phi}\right)^4, \quad \gamma_5 = \Phi^4 \quad (36)$$

Somit gilt für die Folge  $c_n$  die verallgemeinerte Binet-Formel:

$$c_n = r_1 + r_2 \left(-\left(\frac{1}{\Phi}\right)^2\right)^n + r_3 \left(-\Phi^2\right)^n + r_4 \left(\left(\frac{1}{\Phi}\right)^4\right)^n + r_5 \left(\Phi^4\right)^n \quad (37)$$

### 4.3 Beispiele

#### 4.3.1 Vierte Potenzen der Fibonacci-Folge

Wir arbeiten mit den Startwerten:

$$c_0 = 0, \quad c_1 = 1, \quad c_2 = 1, \quad c_3 = 16, \quad c_4 = 81 \quad (38)$$

Für die Koeffizienten  $r_1, r_2, r_3, r_4$  erhalten wir die Bedingung:

$$\begin{aligned}
0 &= r_1 + r_2 \left(-\left(\frac{1}{\Phi}\right)^2\right)^0 + r_3 (-\Phi^2)^0 + r_4 \left(\left(\frac{1}{\Phi}\right)^4\right)^0 + r_5 (\Phi^4)^0 \\
1 &= r_1 + r_2 \left(-\left(\frac{1}{\Phi}\right)^2\right)^1 + r_3 (-\Phi^2)^1 + r_4 \left(\left(\frac{1}{\Phi}\right)^4\right)^1 + r_5 (\Phi^4)^1 \\
1 &= r_1 + r_2 \left(-\left(\frac{1}{\Phi}\right)^2\right)^2 + r_3 (-\Phi^2)^2 + r_4 \left(\left(\frac{1}{\Phi}\right)^4\right)^2 + r_5 (\Phi^4)^2 \\
16 &= r_1 + r_2 \left(-\left(\frac{1}{\Phi}\right)^2\right)^3 + r_3 (-\Phi^2)^3 + r_4 \left(\left(\frac{1}{\Phi}\right)^4\right)^3 + r_5 (\Phi^4)^3 \\
81 &= r_1 + r_2 \left(-\left(\frac{1}{\Phi}\right)^2\right)^4 + r_3 (-\Phi^2)^4 + r_4 \left(\left(\frac{1}{\Phi}\right)^4\right)^4 + r_5 (\Phi^4)^4
\end{aligned} \tag{39}$$

Das Gleichungssystem (39) hat die Lösung:

$$r_1 = \frac{6}{25}, \quad r_2 = -\frac{4}{25}, \quad r_3 = -\frac{4}{25}, \quad r_4 = \frac{1}{25}, \quad r_5 = \frac{1}{25} \tag{40}$$

Dies ergibt die Formel:

$$F_n^4 = \frac{6}{25} - \frac{4}{25} \left(-\left(\frac{1}{\Phi}\right)^2\right)^n - \frac{4}{25} (-\Phi^2)^n + \frac{1}{25} \left(\left(\frac{1}{\Phi}\right)^4\right)^n + \frac{1}{25} (\Phi^4)^n \tag{41}$$

#### 4.3.2 Vierte Potenzen der Lucas-Folge

Wir arbeiten mit den Startwerten:

$$c_0 = 16, \quad c_1 = 1, \quad c_2 = 81, \quad c_3 = 256, \quad c_4 = 2401 \tag{42}$$

Für die Koeffizienten  $r_1, r_2, r_3, r_4$  erhalten wir die Bedingung:



$$\begin{aligned}
16 &= r_1 + r_2 \left(-\left(\frac{1}{\Phi}\right)^2\right)^0 + r_3 (-\Phi^2)^0 + r_4 \left(\left(\frac{1}{\Phi}\right)^4\right)^0 + r_5 (\Phi^4)^0 \\
1 &= r_1 + r_2 \left(-\left(\frac{1}{\Phi}\right)^2\right)^1 + r_3 (-\Phi^2)^1 + r_4 \left(\left(\frac{1}{\Phi}\right)^4\right)^1 + r_5 (\Phi^4)^1 \\
81 &= r_1 + r_2 \left(-\left(\frac{1}{\Phi}\right)^2\right)^2 + r_3 (-\Phi^2)^2 + r_4 \left(\left(\frac{1}{\Phi}\right)^4\right)^2 + r_5 (\Phi^4)^2 \\
256 &= r_1 + r_2 \left(-\left(\frac{1}{\Phi}\right)^2\right)^3 + r_3 (-\Phi^2)^3 + r_4 \left(\left(\frac{1}{\Phi}\right)^4\right)^3 + r_5 (\Phi^4)^3 \\
2406 &= r_1 + r_2 \left(-\left(\frac{1}{\Phi}\right)^2\right)^4 + r_3 (-\Phi^2)^4 + r_4 \left(\left(\frac{1}{\Phi}\right)^4\right)^4 + r_5 (\Phi^4)^4
\end{aligned} \tag{43}$$

Das Gleichungssystem (43) hat die Lösung:

$$r_1 = 6, \quad r_2 = 4, \quad r_3 = 4, \quad r_4 = 1, \quad r_5 = 1 \tag{44}$$

Dies ergibt die Formel:

$$L_n^4 = 6 + 4 \left(-\left(\frac{1}{\Phi}\right)^2\right)^n + 4 (-\Phi^2)^n + \left(\left(\frac{1}{\Phi}\right)^4\right)^n + (\Phi^4)^n = \left(\Phi^n + \left(-\frac{1}{\Phi}\right)^n\right)^4 \tag{45}$$

Da haben wir etwas mit der Kirche ums Dorf gerechnet.