Hans Walser, [20150819]

Fibonacci-Potenzen

1 Fibonacci-Quadrate

Das Wachstum der Fibonacci-Folge lässt sich sehr schön mit der oft gesehenen Abbildung 1 illustrieren. Beim Start mit einem Einheitsquadrat sind die Seitenlängen der Quadrate sind gerade die Fibonacci-Zahlen.

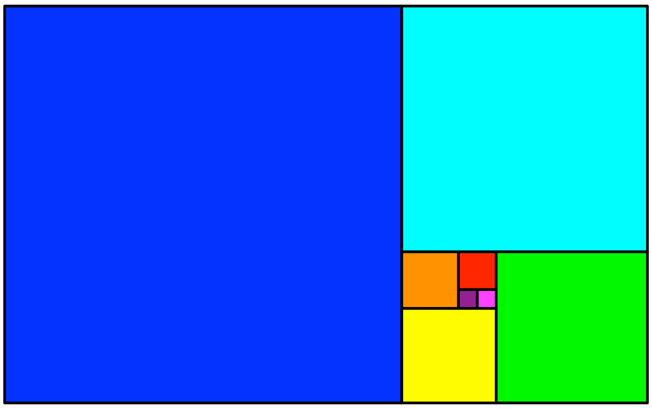

Abb. 1: Fibonacci-Quadrate

Für die Seitenlängen ergibt sich also:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots \tag{1}$$

Für diese Folge gilt die Rekursion:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \tag{2}$$

2 Fibonacci-Quadrat-Flächen

Für die Flächeninhalte der Quadrate der Abbildung 1 finden wir:

$$1, 1, 4, 9, 25, 64, 169, 441, \ldots \tag{3}$$

Mit einigem Tüfteln finden wir die dreistellige Rekursion:

$$F_n^2 = 2F_{n-1}^2 + 2F_{n-2}^2 - F_{n-3}^2 \tag{4}$$

Beweis durch Nachrechnen unter Benützung von (2).

Beispiel ($n = 8$):

$$441 = 2 \cdot 169 + 2 \cdot 64 - 25$$

Das kann auch in der Form

$$441 + 25 = 2 \cdot 169 + 2 \cdot 64$$

geschrieben werden. Geometrisch heißt das (Abb. 2), dass das ganz große und das ganz kleine Quadrat zusammen flächenmäßig gleich dem Doppelten der beiden mittleren Quadrate sind.

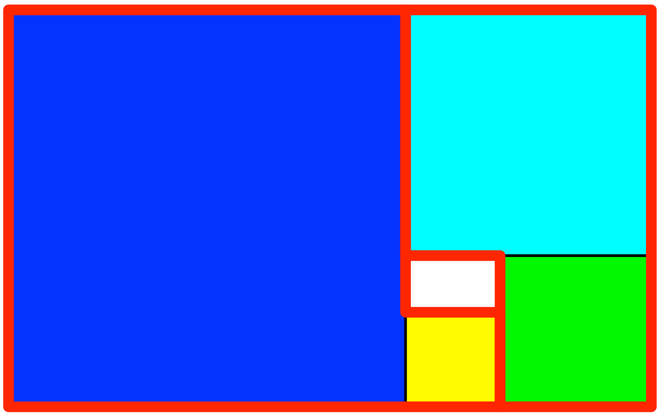

Abb. 2: Blau plus gelb = zwei mal (grün plus cyan)

Dies kann durch den Zerlegungsbeweis der Abbildung 3 unmittelbar eingesehen werden.

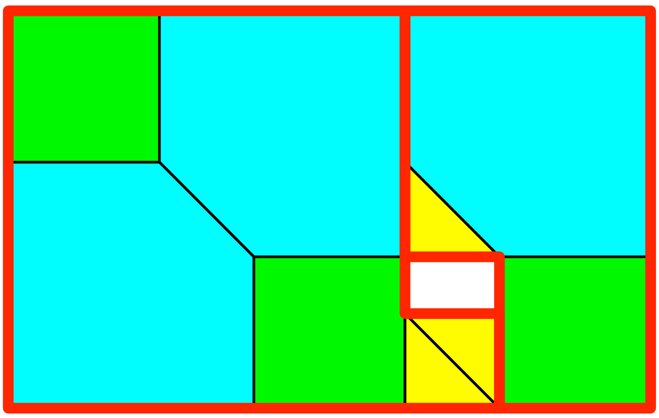

Abb. 3: Zerlegung

Bei dreistelligen Rekursionen spricht man manchmal von einer „*Tri*bonacci-Folge“. (Sprachlich korrekt müsste dann allerdings die gewöhnliche Fibonacci-Folge als „*Bi*bonacci-Folge“ bezeichnet werden.)

Damit ist das Thema umrissen: Welche Rekursionen gelten für die k-ten Potenzen der Fibonacci-Zahlen.

3 Bezeichnungen

Wir werden sehen, dass wir für die k-te Potenz eine $(k+1)$-stellige Rekursion erhalten.

Für die k-te Potenz machen wir daher den Ansatz:

$$F_n^k = r_{k,1}F_{n-1}^k + r_{k,2}F_{n-2}^k + \cdots + r_{k,(k+1)}F_{n-(k+1)}^k = \sum_{j=1}^{k+1} r_{k,j}F_{n-j}^k \tag{5}$$

4 Resultate. Zahlendreieck

Mit einigem Rechnen erhalten wir:

$$\begin{aligned}
F_n^0 &= 1F_{n-1}^0 \\
F_n^1 &= 1F_{n-1}^1 + 1F_{n-2}^1 \\
F_n^2 &= 2F_{n-1}^2 + 2F_{n-2}^2 - F_{n-3}^2 \\
F_n^3 &= 3F_{n-1}^3 + 6F_{n-2}^3 - 3F_{n-3}^3 - F_{n-4}^3 \\
F_n^4 &= 5F_{n-1}^4 + 15F_{n-2}^4 - 15F_{n-3}^4 - 5F_{n-4}^4 + F_{n-5}^4 \\
F_n^5 &= 8F_{n-1}^5 + 40F_{n-2}^5 - 60F_{n-3}^5 - 40F_{n-4}^5 + 8F_{n-5}^5 + F_{n-6}^5
\end{aligned} \tag{7}$$

Die Abbildung 4 zeigt das zugehörige Zahlendreieck.

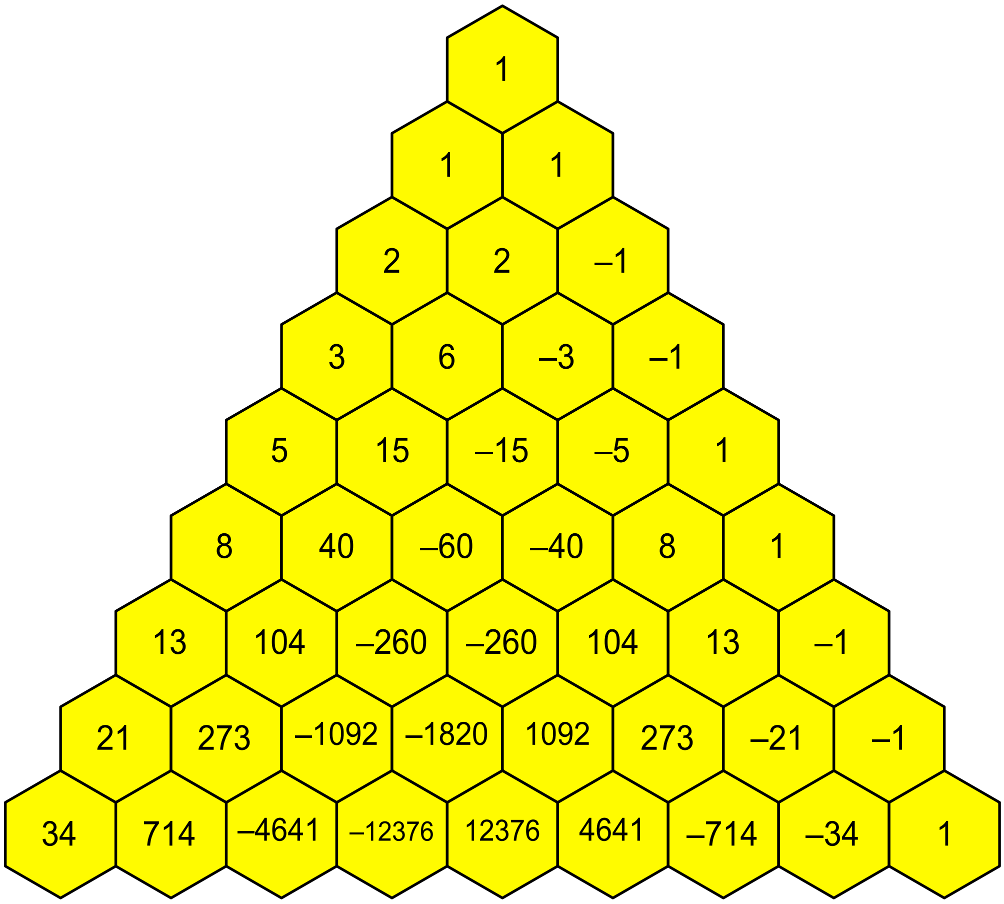

Abb. 4: Zahlendreieck

Das Zahlendreieck hat in Zweierschritten alternierende Vorzeichen.

Abgesehen von den Vorzeichen ist es beinahe symmetrisch. Wir können (abgesehen von den Vorzeichen) eine Symmetrie erreichen, wenn wir die Rekursionen (7) in der „Null-Form“ schreiben:

$$\begin{aligned}
0 &= -F_n^0 + 1F_{n-1}^0 \\
0 &= -F_n^1 + 1F_{n-1}^1 + 1F_{n-2}^1 \\
0 &= -F_n^2 + 2F_{n-1}^2 + 2F_{n-2}^2 - F_{n-3}^2 \\
0 &= -F_n^3 + 3F_{n-1}^3 + 6F_{n-2}^3 - 3F_{n-3}^3 - F_{n-4}^3 \\
0 &= -F_n^4 + 5F_{n-1}^4 + 15F_{n-2}^4 - 15F_{n-3}^4 - 5F_{n-4}^4 + F_{n-5}^4 \\
0 &= -F_n^5 + 8F_{n-1}^5 + 40F_{n-2}^5 - 60F_{n-3}^5 - 40F_{n-4}^5 + 8F_{n-5}^5 + F_{n-6}^5
\end{aligned} \tag{8}$$

In der ersten Schrägzeile der Abbildung 2 erscheinen die Fibonacci-Zahlen.

In der zweiten Schrägzeile sitzen die Produkte zweier aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen. Diese genügen interessanterweise derselben Rekursion wie die Quadrate der Fibonacci-Zahlen.

In der dritten Schrägzeile sitzen Zahlen, welch der Rekursion der Kuben der Fibonacci-Zahlen genügen.

Und so weiter.

Das Zahlendreieck ist also der Schlüssel zu sich selber.

5 Rechnerisches und Technisches

Für die Herleitung wurde die Formel von Binet verwendet (Walser 2012, S. 13, und Walser 2013, S. 106): Mit

$$\Phi = \tfrac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ (Goldener Schnitt)} \tag{9}$$

ist:

$$F_n = \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^n - \left(-\tfrac{1}{\Phi}\right)^n\right) \tag{10}$$

Man sieht dann auch, dass man tatsächlich mit einer $(k+1)$-stelligen Rekursion durchkommt. Für die Rechnungen wurde CAS verwendet.

Literatur

Walser, Hans (2012): Fibonacci. Zahlen und Figuren. Leipzig, EAGLE, Edition am Gutenbergplatz. ISBN 978-3-937219-60-8.

Walser, Hans (2013): Der Goldene Schnitt. 6., bearbeitete und erweiterte Auflage. Mit einem Beitrag von Hans Wußing über populärwissenschaftliche Mathematikliteratur aus Leipzig. Edition am Gutenbergplatz, Leipzig. ISBN 978-3-937219-85-1.