Hans Walser, [20150825]

Fibonacci-Dreieck

1 Worum geht es

Es wird ein Zahlendreieck hergeleitet, das viele Beziehungen zur Fibonacci-Folge hat.

2 Funktionenfolge

Mit Φ bezeichnen wir den Goldenen Schnitt (Walser 2013):

$$\Phi = \tfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618 \tag{1}$$

Nun definieren wir eine Funktionenfolge:

$$\begin{aligned} f_0(x) &= 1 \\ f_n(x) &= \prod_{i=1}^{n} \left(x - (-1)^{i-1} \Phi^{n+1-2i} \right) \end{aligned} \tag{2}$$

Erste Beispiele:

$$\begin{aligned} f_0(x) &= 1 \\ f_1(x) &= x - 1 \\ f_2(x) &= (x - \Phi)\left(x + \tfrac{1}{\Phi}\right) = x^2 - x - 1 \\ f_{3(x)} &= \left(x - \Phi^2\right)(x+1)\left(x - \left(\tfrac{1}{\Phi}\right)^2 \right) = x^3 - 2x^2 - 2x + 1 \end{aligned} \tag{3}$$

Im Folgenden die Beispiele für $n = 0 \ldots 8$.

$$\begin{aligned}
&f_0(x) = 1\\
&f_1(x) = x - 1\\
&f_2(x) = x^2 - x - 1\\
&f_3(x) = x^3 - 2x^2 - 2x + 1\\
&f_4(x) = x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 3x + 1\\
&f_5(x) = x^5 - 5x^4 - 15x^3 + 15x^2 + 5x - 1\\
&f_6(x) = x^6 - 8x^5 - 40x^4 + 60x^3 + 40x^2 - 8x - 1\\
&f_7(x) = x^7 - 13x^6 - 104x^5 + 260x^4 + 260x^3 - 104x^2 - 13x + 1\\
&f_8(x) = x^8 - 21x^7 - 273x^6 + 1092x^5 + 1820x^4 - 1092x^3 - 273x^2 + 21x + 1
\end{aligned} \tag{4}$$

Die Koeffizientenmatrix ist eine Dreiecksmatrix (Tab. 1).

1								
1	–1							
1	–1	–1						
1	–2	–2	1					
1	–3	–6	3	1				
1	–5	–15	15	5	–1			
1	–8	–40	60	40	–8	–1		
1	–13	–104	260	260	–104	–13	1	
1	–21	–273	1092	1820	–1092	–273	21	1

Tab. 1: Dreiecksmatrix

Es handelt sich dabei um das Fibonacci-Dreieck (Signed Fibonomial triangle, oeis.org/A055870).
In der zweiten Spalte erkennen wir (bis auf Vorzeichen) die Fibonacci-Zahlen.

In der dritten Spalte haben wir (bis auf Vorzeichen) die Flächeninhalte der Fibonacci-Rechtecke gemäß Abbildung 1.

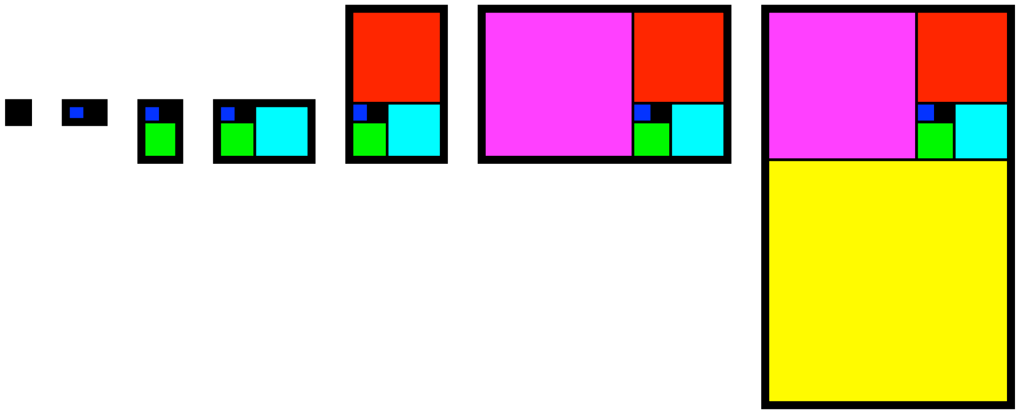

Abb. 1: Fibonacci-Rechtecke

Die Zeilen geben im Prinzip die Rekursionskoeffizienten für die Potenzen der Fibonacci-Zahlen. So ist zum Beispiel:

$$\begin{aligned} &1F_{n+1}^3 - 3F_n^3 - 6F_{n-1}^3 + 3F_{n-2}^3 + 1F_{n-3}^3 = 0 \\ &F_{n+1}^3 = 3F_n^3 + 6F_{n-1}^3 - 3F_{n-2}^3 - 1F_{n-3}^3 \end{aligned} \tag{5}$$

Die Abbildung 2 zeigt das Fibonacci-Dreieck in einer nostalgischen Anordnung.

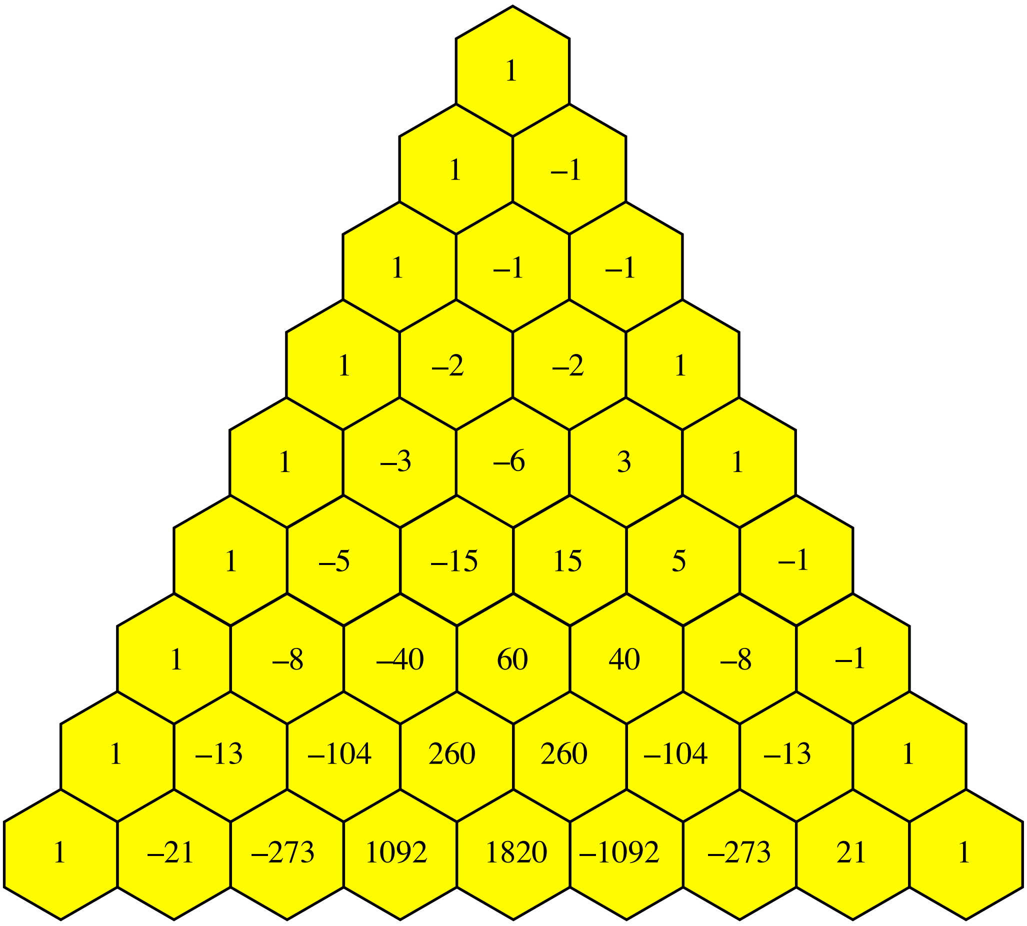

Abb. 2: Fibonacci-Dreieck

Das Dreieck ist bis auf Vorzeichen axialsymmetrisch.

3 Funktionsgrafen

Die Abbildung 3 zeigt die Funktionsgrafen und die Nullstellen für $f_0(x),...,f_4(x)$.

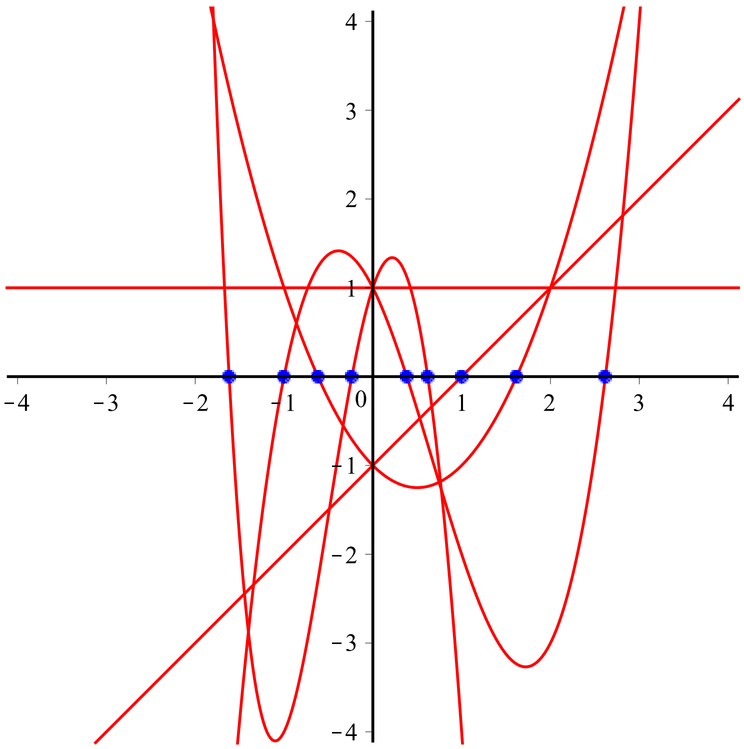

Abb. 3: Funktionsgrafen

4 Berechnung der Elemente

Die Elemente $a_{n,k}$ des Fibonacci-Dreiecks können wie folgt berechnet werden (F_n bezeichnet die Fibonacci-Zahlen):

$$a_{n,k} = (-1)^{k+\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor} \frac{\prod_{j=1}^{k} F_{n-k+j}}{\prod_{j=1}^{k} F_j} \tag{6}$$

Websites

Signed Fibonomial triangle: oeis.org/A055870
Triangle of Fibonomial coefficients: oeis.org/A010048

Literatur

Walser, H. (2013): *Der Goldene Schnitt*. 6., bearbeitete und erweiterte Auflage. Mit einem Beitrag von Hans Wußing über populärwissenschaftliche Mathematikliteratur aus Leipzig. Leipzig: EAGLE, Edition am Gutenbergplatz. ISBN 978-3-937219-85-1.