Hans Walser, [20120628], [20140317a]

Fibonacci-Dreieck

Anregung: K. H., Gö.

1 Fragestellung

Ein rechtwinkliges Dreieck habe als Kathetenlängen die Fibonacci-Zahlen F_n und F_{n+1}. Wie lang ist seine Hypotenuse.

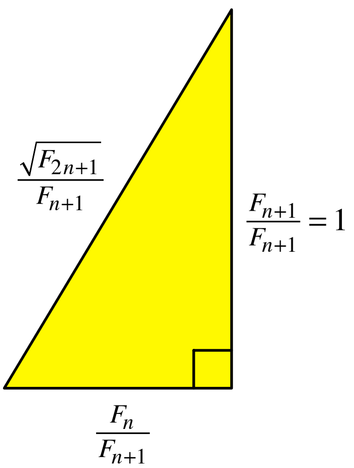
2 Beispiele

n	F_n	F_{n+1}	Hypotenuse	Bemerkungen
1	1	1	$\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}=\sqrt{F_3}$	Halbes Quadrat
2	1	2	$\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}=\sqrt{F_5}$	Domino-Dreieck oder Rösselsprung-Dreieck
3	2	3	$\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}=\sqrt{F_7}$	
4	3	5	$\sqrt{3^2+5^2}=\sqrt{34}=\sqrt{F_9}$	

Wir erkennen die bekannte Formel:

$$F_n^2+F_{n+1}^2=F_{2n+1}$$

Illustration im Fibonacci-Dreieck:



Fibonacci-Dreieck

3 Beweis

Es sei $\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1.618$ (goldener Schnitt). Wir verwenden die Formel von Binet:

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\phi^n-\left(-\frac{1}{\phi}\right)^n\right)$$

Damit wird:

$$F_n^2 = \tfrac{1}{5}\left(\phi^{2n} - 2\phi^n\left(-\tfrac{1}{\phi}\right)^n + \left(-\tfrac{1}{\phi}\right)^{2n}\right) = \tfrac{1}{5}\left(\phi^{2n} - 2(-1)^n + \left(-\tfrac{1}{\phi}\right)^{2n}\right)$$

Entsprechend:

$$F_{n+1}^2 = \tfrac{1}{5}\left(\phi^{2n+2} - 2(-1)^{n+1} + \left(-\tfrac{1}{\phi}\right)^{2n+2}\right)$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
F_n^2 + F_{n+1}^2 &= \tfrac{1}{5}\left(\phi^{2n} + \phi^{2n+2} + \left(-\tfrac{1}{\phi}\right)^{2n} + \left(-\tfrac{1}{\phi}\right)^{2n+2}\right)\\
&= \tfrac{1}{5}\left(\phi^{2n}\left(1+\phi^2\right) + \left(-\tfrac{1}{\phi}\right)^{2n}\left(1+\left(\tfrac{1}{\phi}\right)^2\right)\right)\\
&= \tfrac{1}{5}\left(\phi^{2n}\phi\left(\tfrac{1}{\phi}+\phi\right) + \left(-\tfrac{1}{\phi}\right)^{2n}\tfrac{1}{\phi}\left(\phi+\tfrac{1}{\phi}\right)\right)\\
&= \frac{\phi+\frac{1}{\phi}}{5}\left(\phi^{2n+1} - \left(-\tfrac{1}{\phi}\right)^{2n+1}\right)
\end{aligned}$$

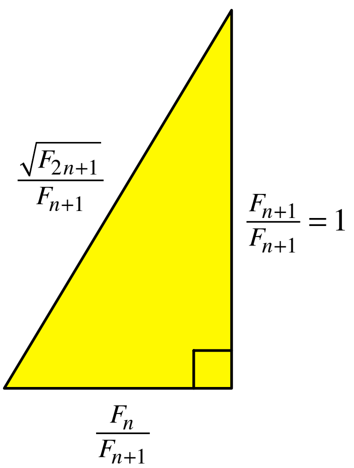
Wegen $\phi + \frac{1}{\phi} = \sqrt{5}$ folgt schließlich:

$$F_n^2 + F_{n+1}^2 = \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\phi^{2n+1} - \left(-\tfrac{1}{\phi}\right)^{2n+1}\right) = F_{2n+1}$$

Dies war zu beweisen.

4 Normierung

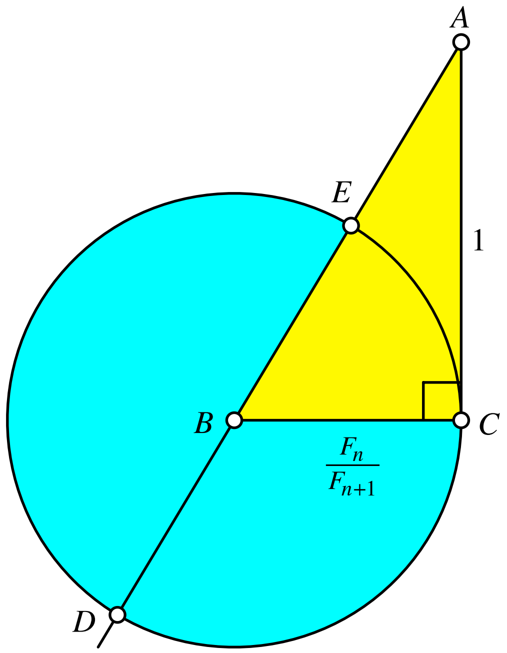
Wir normieren die lange Kathete auf 1, indem wir alle Längen durch F_{n+1} dividieren.



Normierung

5 Konstruktion

Und nun führen wir eine Konstruktion durch, die wir der klassischen Konstruktion des Goldenen Schnittes abgeguckt haben. Für $n = 2$ ist es genau die klassische Konstruktion des Goldenen Schnittes (vgl. Walser, 2013).



Konstruktion

Wir führen folgende Zahlen ein:

$$\tau_n = \overline{AD} = \frac{\sqrt{F_{2n+1}} + F_n}{F_{n+1}} \quad , \quad \rho_n = \overline{AE} = \frac{\sqrt{F_{2n+1}} - F_n}{F_{n+1}}$$

Die Tabelle zeigt die ersten Werte dieser Zahlen.

n	τ_n	ρ_n
1	2.414213562	0.4142135624
2	1.618033989	0.6180339887
3	1.868517092	0.5351837585
4	1.766190379	0.566190379
5	1.804247642	0.5542476415
6	1.789564425	0.558795194
7	1.795151337	0.5570560986
8	1.793014188	0.5577200707
9	1.793830048	0.5574664117
10	1.793518351	0.5575632944
11	1.793637399	0.5575262875
12	1.793591925	0.5575404227
13	1.793609294	0.5575350235
14	1.79360266	0.5575370858
15	1.793605194	0.5575362981
16	1.793604226	0.557536599
17	1.793604596	0.5575364841
18	1.793604454	0.557536528
19	1.793604508	0.5575365112

20	1.793604488	0.5575365176
21	1.793604496	0.5575365152
22	1.793604493	0.5575365161
23	1.793604494	0.5575365157
24	1.793604493	0.5575365159
25	1.793604493	0.5575365158
26	1.793604493	0.5575365158
27	1.793604493	0.5575365158
28	1.793604493	0.5575365158
29	1.793604493	0.5575365158
30	1.793604493	0.5575365158

Tabelle

6 Eigenschaften der Zahlen

Für das Produkt der beiden Zahlen erhalten wir:

$$\tau_n \rho_n = \frac{\sqrt{F_{2n+1}} + F_n}{F_{n+1}} \cdot \frac{\sqrt{F_{2n+1}} - F_n}{F_{n+1}} = \frac{F_{2n+1} - F_n^2}{F_{n+1}^2}$$

Wegen $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$ ist $F_{2n+1} - F_n^2 = F_{n+1}^2$ und daher:

$$\tau_n \rho_n = 1$$

Die beiden Zahlen sind Kehrwerte voneinander.

Für die Differenz der beiden Zahlen erhalten wir:

$$\tau_n - \rho_n = \frac{\sqrt{F_{2n+1}} + F_n}{F_{n+1}} - \frac{\sqrt{F_{2n+1}} - F_n}{F_{n+1}} = \frac{2F_n}{F_{n+1}}$$

Die Differenzen sind rational.

7 Sonderfälle

Für $n = 1$ erhalten wir: $\tau_1 = \sqrt{2} + 1 \quad , \quad \rho_1 = \sqrt{2} - 1$

Für $n = 2$ erhalten wir den Goldenen Schnitt: $\tau_2 = \phi \quad , \quad \rho_2 = \frac{1}{\phi}$

Für $n \to \infty$ wird das Dreieck das halbe Goldene Rechteck mit der Langseite 1 und der Schmalseite $\frac{1}{\phi}$. Wir erhalten:

$$\tau_\infty = \frac{1}{\sqrt{\phi}} \sqrt[4]{5} + \frac{1}{\phi} \approx 1.793604493$$

$$\rho_\infty = \frac{1}{\sqrt{\phi}} \sqrt[4]{5} - \frac{1}{\phi} \approx 0.5575365158$$

Literatur

Walser, H. (2013): *Der Goldene Schnitt*. 6., bearbeitete und erweiterte Auflage. Mit einem Beitrag von Hans Wußing über populärwissenschaftliche Mathematikliteratur aus Leipzig. Leipzig: EAGLE, Edition am Gutenbergplatz. ISBN 978-3-937219-85-1.