Hans Walser, [20150815]

Fibonacci-erzeugende Funktion

Anregung: (Hong, 2015)

1 Worum geht es?

Wir arbeiten mit der verallgemeinerten Fibonacci-Folge a_n mit den Startwerten a_0 und a_1 und der Rekursion:

$$a_n = pa_{n-1} + qa_{n-2} \tag{1}$$

Wir suchen nun eine erzeugende Funktion, also eine (formale) Potenzreihe von der Form:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{2}$$

2 Folgenglieder

Die Tabelle 1 zeigt die ersten Folgenglieder.

n	a_n
0	a_0 Startwert
1	a_1 Startwert
2	$a_2 = pa_1 + qa_0$
3	$a_3 = p^2 a_1 + pqa_0 + qa_1$
4	$a_4 = p^3 a_1 + p^2 qa_0 + 2pqa_1 + q^2 a_0$
5	$a_5 = p^4 a_1 + p^3 qa_0 + 3p^2 qa_1 + 2pq^2 a_0 + q^2 a_1$

Tab. 1: Folgenglieder

Für $p = q = 1$ und die Startwerte $a_0 = 0, a_1 = 1$ ergibt sich die gewöhnliche Fibonacci-Folge.

3 Erzeugende Funktion

Die Funktion

$$f(x)=\frac{a_0+(a_1-a_0 p)x}{1-px-qx^2} \tag{3}$$

leistet das Gewünschte, wie durch Rückrechnen eingesehen werden kann. Zu zeigen ist:

$$a_0+(a_1-a_0 p)x=\left(1-px-qx^2\right)\left(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\right) \tag{4}$$

Für das Produkt auf der rechten Seite von (4) erhalten wir:

$$\begin{aligned}
&\left(1-px-qx^2\right)\left(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\right)=\\
&=\begin{cases} \qquad a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots \\ -a_0px-a_1px^2-a_2px^3-a_3px^4-\cdots \\ -a_0qx^2-a_1qx^3-a_2qx^4-a_3qx^5-\cdots \end{cases}\\
&=a_0+(a_1-a_0p)x+\underbrace{(a_2-a_1p-a_0q)}_{=0}x^2+\underbrace{(a_3-a_2p-a_1q)}_{=0}x^3+\cdots\\
&=a_0+(a_1-a_0p)x
\end{aligned} \tag{5}$$

Wegen der Rekursion (1) verschwinden die Koeffizienten für x^2 und höhere Potenzen von x. Damit sind (4) und (3) bewiesen.

3.1 Beispiele

3.1.1 Fibonacci

Für $p=q=1$ und die Startwerte $a_0=0, a_1=1$ ergibt sich:

$$f(x)=\frac{x}{1-x-x^2}=x+x^2+2x^3+3x^4+5x^5+8x^6+13x^7+21x^8+\cdots \tag{6}$$

Die Abbildung 1 zeigt den Grafen dieser Funktion.

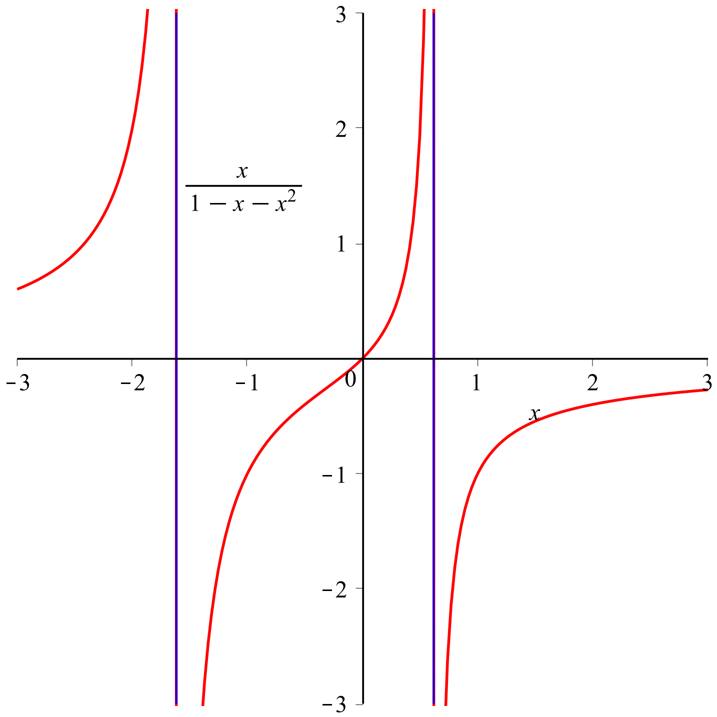

Abb. 1: Funktionsgraf

3.1.2 $p = 2$

Für $p=2, q=1$ und die Startwerte $a_0=0, a_1=1$ ergibt sich:

$$f(x)=\frac{x}{1-2x-x^2}=x+2x^2+5x^3+12x^4+29x^5+70x^6+169x^7+408x^8+\cdots \tag{7}$$

Die Abbildung 2 zeigt den Grafen dieser Funktion.

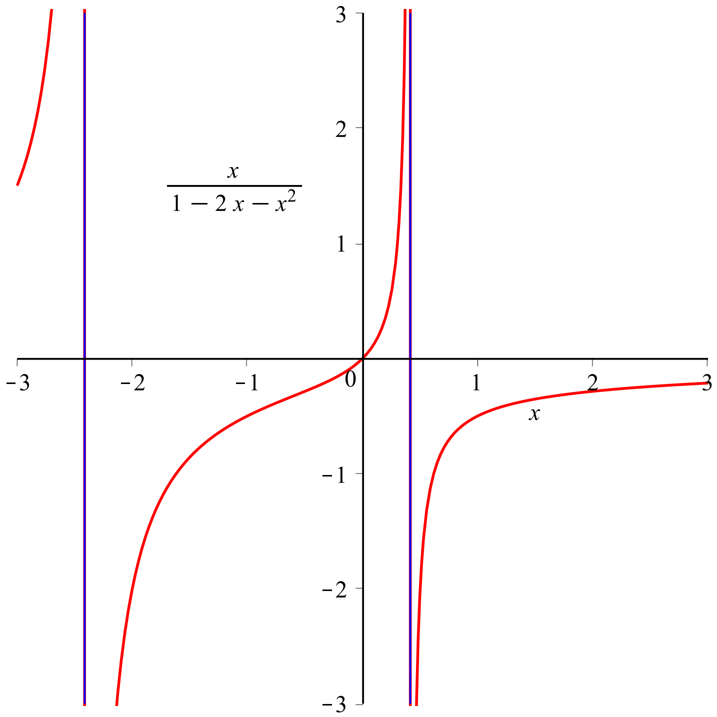

Abb. 2: Funktionsgraf

4 Quotientenfolge

Wir bilden nun die Quotientenfolge:

$$b_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} \tag{8}$$

Nebenbemerkung: Es ist (nicht mit der schulischen *p*-*q*-Formel verwechseln):

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{-p+\sqrt{p^2+4q}}{2q} \quad \text{und} \quad \lim_{n\to-\infty} b_n = \frac{-p-\sqrt{p^2+4q}}{2q} \tag{10}$$

Man kann sich überlegen, was die zweite Formel von (10) bedeutet.
Weiter sei nun:

$$c_n = f\left(b_n\right) \tag{11}$$

4.1 Beispiele

4.1.1 Fibonacci

Für $p = q = 1$ und die Startwerte $a_0 = 0, a_1 = 1$ ergeben sich die Werte der Tabelle 2.

n	a_n	b_n	c_n
0	0	0	0
1	1	1	–1
2	1	$\frac{1}{2}$	2
3	2	$\frac{2}{3}$	–6
4	3	$\frac{3}{5}$	15
5	5	$\frac{5}{8}$	–40

Tab. 2: Fibonacci

4.1.2 *p* = 2

Für $p = 2, q = 1$ und die Startwerte $a_0 = 0, a_1 = 1$ ergeben sich die Werte der Tabelle 3.

n	a_n	b_n	c_n
0	0	0	0
1	1	$\frac{1}{2}$	–2
2	2	$\frac{2}{5}$	10
3	5	$\frac{5}{12}$	–60
4	12	$\frac{12}{29}$	348
5	29	$\frac{29}{70}$	–2030

Tab. 3

4.1.3 *q* = 2

Für $p = 1, q = 2$ und die Startwerte $a_0 = 0, a_1 = 1$ ergeben sich die Werte der Tabelle 4. Die Werte der Folge c_n sind nicht mehr ganzzahlig. Der Einfluss von $q = 2$ ist offensichtlich.

n	a_n	b_n	c_n
0	0	0	0
1	1	1	$-\frac{1}{2}$
2	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$
3	3	$\frac{3}{5}$	$-\frac{15}{8}$
4	5	$\frac{5}{11}$	$\frac{55}{16}$
5	11	$\frac{11}{21}$	$-\frac{231}{32}$

Tab. 4

5 Tribonacci

Die Folge c_n genügt folgender Rekursion:

$$c_n = -\frac{p^2+q}{q} c_{n-1} + \frac{p^2+q}{q} c_{n-2} + c_{n-3} \tag{12}$$

Wir haben eine so genannte Tribonacci-Folge.
Beweis fehlt, experimentell erhärtet.
Die Startwerte a_0 und a_1 der ursprünglichen Folge haben keinen Einfluss auf die Rekursion (12). Hingegen hängen die Startwerte der Folge c_n von den Starwerten der ursprünglichen Folge ab:

$$c_0 = f(b_0) = f\left(\frac{a_0}{a_1}\right), \quad c_1 = f(b_1) = f\left(\frac{a_1}{a_2}\right), \quad c_2 = f(b_2) = f\left(\frac{a_2}{a_3}\right) \tag{13}$$

Für $q = 1$ und ganzzahlige Startwerte sowie ganzzahliges p sind die Werte von c_n ganzzahlig.
Die Folge c_n hat mit der Schreibweise

$$r = -\frac{p^2+q}{q}, \quad s = \frac{p^2+q}{q}, \quad t = 1 \tag{14}$$

die erzeugende Funktion:

$$g(x)=\frac{c_0+(c_1-rc_0)x+(c_2-rc_1-sc_0)x^2}{1-rx-sx^2-tx^3} \tag{15}$$

Literatur

Hong, Dae S. (2015): When is the Generating Function of the Fibonacci Numbers an Integer? *The College Mathematics Journal*. Vol. 46, No. 2, March 2015, 110-112.