Hans Walser, [20060408b]

Falten von Rechtecken

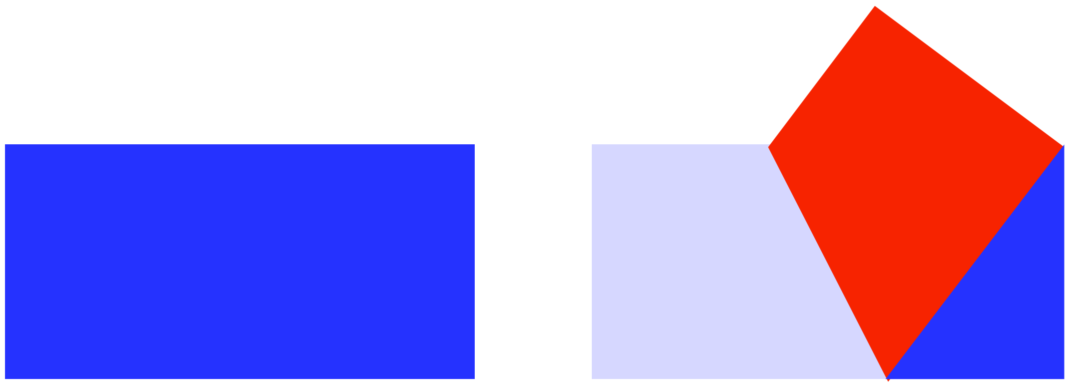
1 Worum geht es?

Es zeigt sich, dass die pythagoreischen Dreiecke durch Falten von geeigneten Rechtecken hergestellt werden können. Das führt zu einer Visualisierung der Parameter für die pythagoreischen Dreiecke.

2 Beispiele

2.1 Das ägyptische Dreieck

Wir falten in einem Rechteck mit dem Seitenverhältnis 2:1 die linke untere Ecke auf die rechte obere Ecke.

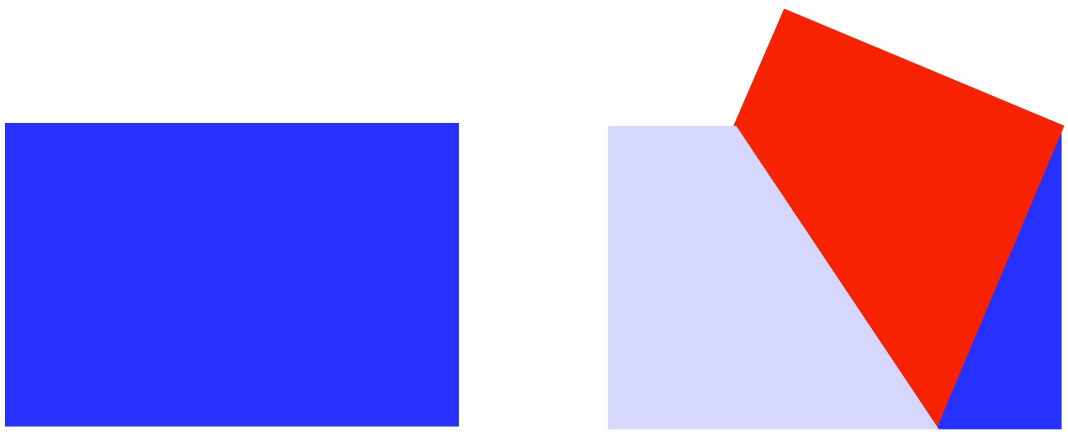


Seitenverhältnis 2:1

Dann bleibt von der blauen Oberseite des Rechteckes rechts unten ein Dreieck sichtbar. Dieses hat das Seitenverhältnis 3:4:5, ist also das pythagoreische rechtwinklige Dreieck, welches von den alten Ägyptern zur Bestimmung eines rechten Winkels eingesetzt wurde.

2.2 Das indische Dreieck

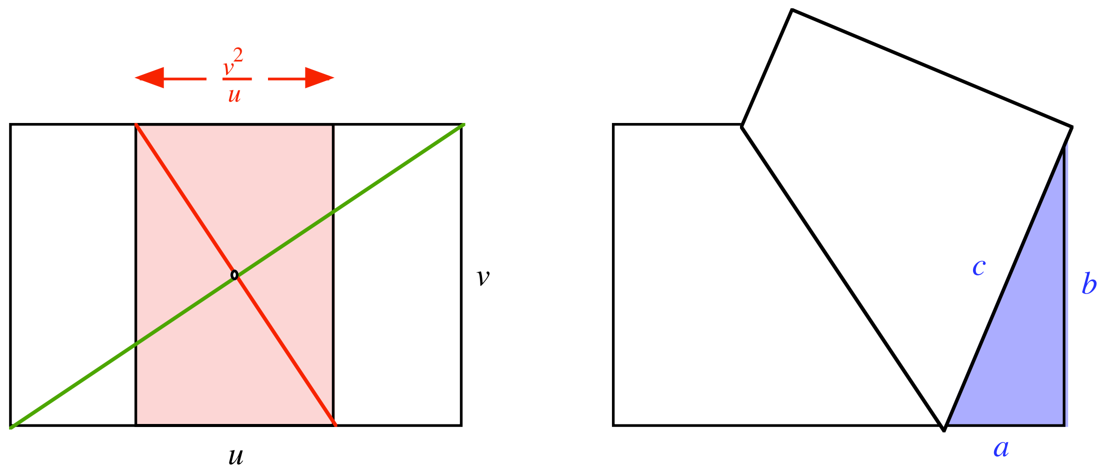
Falten wir aber ein Recheck mit dem Seitenverhältnis 3:2, erhalten wir das indische pythagoreische Dreieck mit dem Seitenverhältnis 5:12:13.



Seitenverhältnis 3:2

3 Allgemein

Wir beginnen mit einem beliebigen Rechteck mit dem Seitenverhältnis u:v.



Seitenverhältnis *u*:*v*

Die Faltlinie ist orthogonal zur Rechtecksdiagonale. Das in der Figur links eingezeichnete kleine rote Rechteck geht daher aus dem ursprünglichen Rechteck hervor durch eine Drehstreckung mit Zentrum im Rechtecksmittelpunkt und einem Drehwinkel von 90°. Da dieses kleine rote Rechteck zum ursprünglichen Rechteck ähnlich ist, haben wir für seine Schmalseite x:

$$\frac{u}{v} = \frac{v}{x} \quad \text{also} \quad x = \frac{v^2}{u}$$

Damit erhalten wir für die Seite a des rechtwinkligen Dreieckes:

$$a = \tfrac{1}{2}u - \tfrac{1}{2}\tfrac{v^2}{u} = \tfrac{u^2-v^2}{2u}$$

Ferner ist $b = v$ und:

$$c = \sqrt{\left(\tfrac{u^2-v^2}{2u}\right)^2 + v^2} = \sqrt{\tfrac{u^4-2u^2v^2+v^4+4u^2v^2}{4u^2}} = \sqrt{\tfrac{u^4+2u^2v^2+v^4}{4u^2}} = \tfrac{u^2+v^2}{2u}$$

Somit ist:

$$a:b:c = \tfrac{u^2-v^2}{2u} : v : \tfrac{u^2+v^2}{2u} = \left(u^2-v^2\right) : 2uv : \left(u^2+v^2\right)$$

Nun läuten aber die Glocken. Bekanntlich (man soll zwar nichts als bekannt voraussetzen, aber das Folgende ist bekannt, andernfalls [Dickson 1966]) lassen sich die pythagoreischen Dreiecke wie folgt parametrisieren: Zu $u, v \in \mathbb{N}$, $u > v$, $(u - v)$ ungerade ist das Dreieck mit dem Seitenverhältnis $a:b:c = \left(u^2-v^2\right):2uv:\left(u^2+v^2\right)$ ein pythagoreisches; umgekehrt erhält man alle pythagoreischen Dreiecke auf diese Weise.

Die Liste fängt an wie folgt:

u	v	$a:b:c$
2	1	$3:4:5$
3	2	$5:12:13$
4	1	$15:8:17$
4	3	$7:24:25$
5	2	$21:20:29$
5	4	$9:40:41$

Die ersten pythagoreischen Dreiecke

Diese vorerst rein zahlentheoretisch motivierten Parameter u und v lassen sich nun also als Länge und Breite unserer Rechtecke deuten.

Literatur

[Dickson 1966] Dickson, Leonard Eugene: *History of the Theory of Numbers*; vol II. New York: Chelsea 1966.