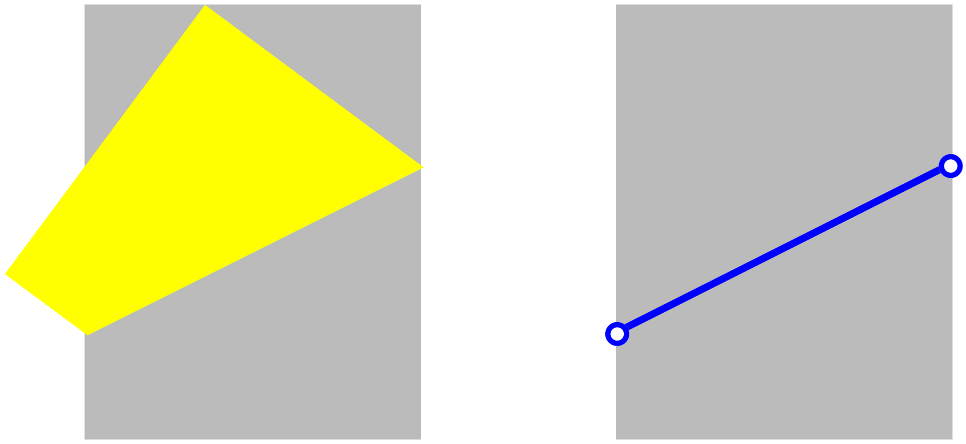
Hans Walser, [20100523a], [20150113]

Falten im Rechteck

Anregungen: E.-R. M., S. und H. S., S.

1 Ecke hinauffalten

In einem Hochformat-Rechteck falten wir die rechte untere Ecke auf die obere Kante. Dann falten wir wieder zurück.

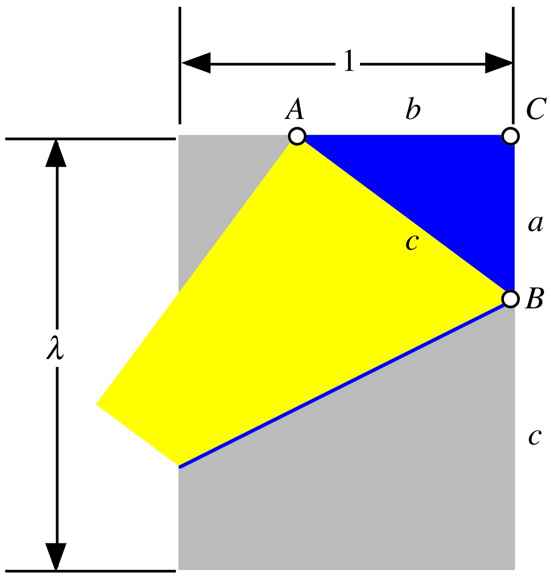


Faltlinie

Wir fragen nun, wie die Faltlinie die senkrechten Rechtecksseiten teilt.

2 Maße und Bezeichnungen

Das Rechteck habe die Breite 1 und die Höhe $\lambda \geq 1$. Bezeichnungen gemäß Figur.



Bezeichnungen

Für die folgenden Überlegungen verwenden wir b als freien Parameter.

3 Teilpunkt am rechten Rand

In welchem Verhältnis teilt der Punkt B die rechte Rechtecksseite?

Es ist zunächst $c+a=\lambda$. Aus dem blauen rechtwinkligen Dreieck ABC ergibt sich:

$$c^2-a^2=b^2$$

$$(c-a)\underbrace{(c+a)}_{\lambda}=b^2$$

$$c-a=\tfrac{b^2}{\lambda}$$

Aus $c+a=\lambda$ und $c-a=\frac{b^2}{\lambda}$ erhalten wir:

$$a=\tfrac{1}{2}\left(\lambda-\tfrac{b^2}{\lambda}\right)=\tfrac{1}{2\lambda}\left(\lambda^2-b^2\right)$$

$$c=\tfrac{1}{2}\left(\lambda+\tfrac{b^2}{\lambda}\right)=\tfrac{1}{2\lambda}\left(\lambda^2+b^2\right)$$

Daraus ergibt sich:

$$\tfrac{a}{c}=\tfrac{\lambda^2-b^2}{\lambda^2+b^2}$$

3.1 Rationales Teilverhältnis

Satz 1

Falls $\lambda^2, b^2 \in \mathbb{Q}$, dann $\frac{a}{c} \in \mathbb{Q}$

Beispiel: $\lambda=\sqrt{2}$ (DIN-Format). Mit $b^2 \in \mathbb{Q}$ erhalten wir am rechten Rand ein rationales Teilverhältnis.

3.2 Pythagoreisches Dreieck

Falls $\lambda, b \in \mathbb{Q}$, dann ist auch $a, c \in \mathbb{Q}$.

Mit $a=\frac{p_a}{q_a}$, $b=\frac{p_b}{q_b}$ und $c=\frac{p_c}{q_c}$, $p_a, q_a, p_b, q_b, p_c, q_c \in \mathbb{N}$ erhalten wir für das blaue rechtwinklige Dreieck ABC:

$$\left(\tfrac{p_a}{q_a}\right)^2+\left(\tfrac{p_b}{q_b}\right)^2=\left(\tfrac{p_c}{q_c}\right)^2 \qquad \| \cdot q_a^2 q_b^2 q_c^2$$

$$\left(p_a q_b q_c\right)^2+\left(q_a p_b q_c\right)^2=\left(q_a q_b p_c\right)^2$$

Das Dreieck ABC ist also ein pythagoreisches Dreieck.

Satz 2

Mit $\lambda, b \in \mathbb{Q}$ ergibt sich ein pythagoreisches Dreieck ABC.

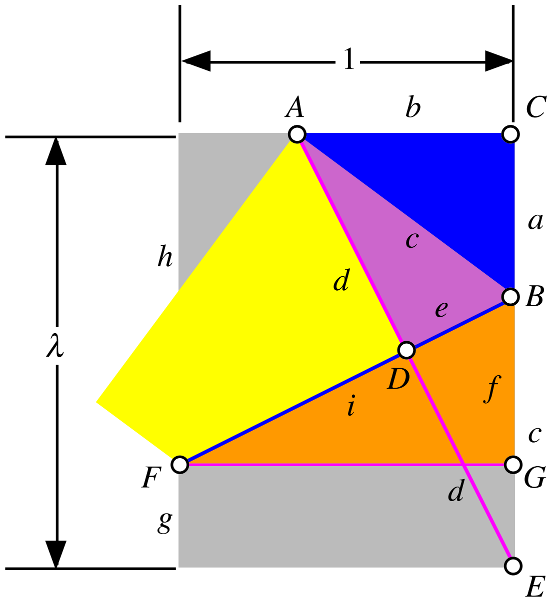
Beispiele:

1. Origami-Papier. Es ist $\lambda=1$. Mit $b \in \mathbb{Q}$ erhalten wir ein pythagoreisches Dreieck.

2. US-Letter-Format. Es ist $\lambda = \frac{8.5\text{ inches}}{11\text{ inches}} = \frac{17}{22}$. Mit $b \in \mathbb{Q}$ erhalten wir ebenfalls ein pythagoreisches Dreieck.

4 Teilpunkt am linken Rand

Wir ergänzen die Bezeichnungen:



Bezeichnungen

In welchem Verhältnis teilt der Punkt F die linke Rechtecksseite?

Zunächst ist $d = \frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 + b^2}$. Daraus ergibt sich:

$$e = \sqrt{c^2 - d^2} = \sqrt{\frac{1}{4\lambda^2}\left(\lambda^2 + b^2\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\lambda^2 + b^2\right)}$$
$$= \frac{1}{2\lambda}\sqrt{\lambda^4 + 2\lambda^2 b^2 + b^4 - \lambda^4 - \lambda^2 b^2} = \frac{b}{2\lambda}\sqrt{\lambda^2 + b^2}$$

Da die Dreiecke *BAD* (magenta) und *BFG* (orange) ähnlich sind, folgt:

$$\frac{f}{1} = \frac{e}{d} = \frac{\frac{b}{2\lambda}\sqrt{\lambda^2+b^2}}{\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2+b^2}} = \frac{b}{\lambda}$$
$$f = \frac{b}{\lambda}$$

Für g erhalten wir:

$$g = c - f = \frac{1}{2\lambda}\left(\lambda^2 + b^2\right) - \frac{b}{\lambda} = \frac{1}{2\lambda}\left(\lambda^2 - \left(2b - b^2\right)\right)$$

Für h ergibt sich:

$$h = \lambda - g = \lambda - \frac{1}{2\lambda}\left(\lambda^2 - \left(2b - b^2\right)\right) = \frac{1}{2\lambda}\left(\lambda^2 + \left(2b - b^2\right)\right)$$

Es ist also:

$$g = \frac{1}{2\lambda}\left(\lambda^2 - \left(2b - b^2\right)\right)$$
$$h = \frac{1}{2\lambda}\left(\lambda^2 + \left(2b - b^2\right)\right)$$
$$\frac{g}{h} = \frac{\lambda^2 - \left(2b - b^2\right)}{\lambda^2 + \left(2b - b^2\right)}$$

Satz 3

Für $\lambda^2 \in \mathbb{Q}$ und $b \in \mathbb{Q}$ ergibt sich am linken Rand ein rationales Teilverhältnis.

Beispiel: DIN-Format und $b \in \mathbb{Q}$.

5 Länge der Faltstrecke

Für die Länge i erhalten wir:

$$i = \sqrt{1 + f^2} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{\lambda^2}} = \frac{1}{\lambda}\sqrt{\lambda^2 + b^2}$$

Wegen der Wurzel ist i in der Regel nicht rational.

6 Beispiele

6.1 Origami

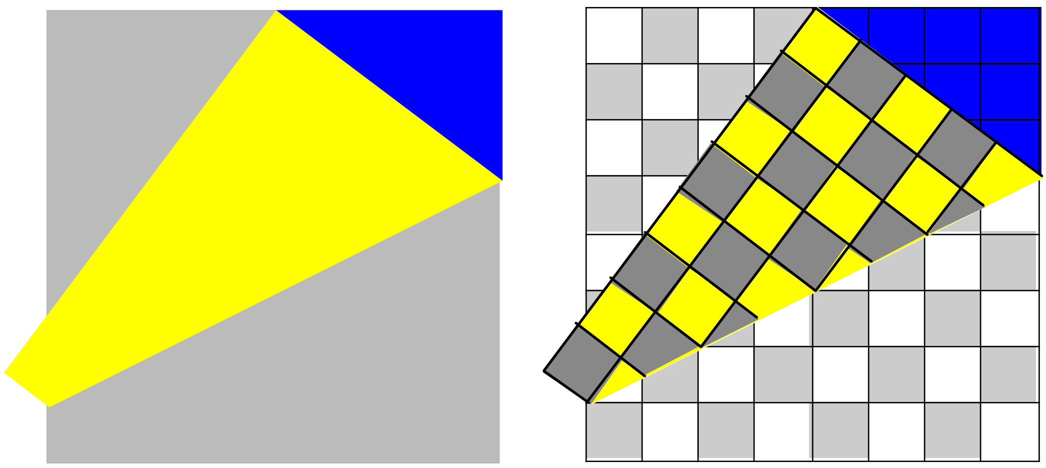
Wir arbeiten mit quadratischem Papier, also $\lambda = 1$.

6.1.1 $b = 0.5$

Für $b = \frac{1}{2}$ ergibt sich:

$$a = \frac{1}{2\lambda}\left(\lambda^2 - b^2\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{8}$$
$$c = \frac{1}{2\lambda}\left(\lambda^2 + b^2\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{8}$$

Wir erhalten mit $a : b : c = 3 : 4 : 5$ das einfachste pythagoreische Dreieck.



Pythagoreisches Dreieck

Am linken Bildrand haben wir das Teilverhältnis $1:7$. Die Figur passt in ein Schachbrett.

6.1.2 $b = 0.75$

Für $b = \frac{3}{4}$ ergibt sich:

$$a = \tfrac{1}{2\lambda}\left(\lambda^2 - b^2\right) = \tfrac{1}{2}\left(1 - \tfrac{9}{16}\right) = \tfrac{7}{32}$$
$$c = \tfrac{1}{2\lambda}\left(\lambda^2 + b^2\right) = \tfrac{1}{2}\left(1 + \tfrac{9}{16}\right) = \tfrac{25}{32}$$

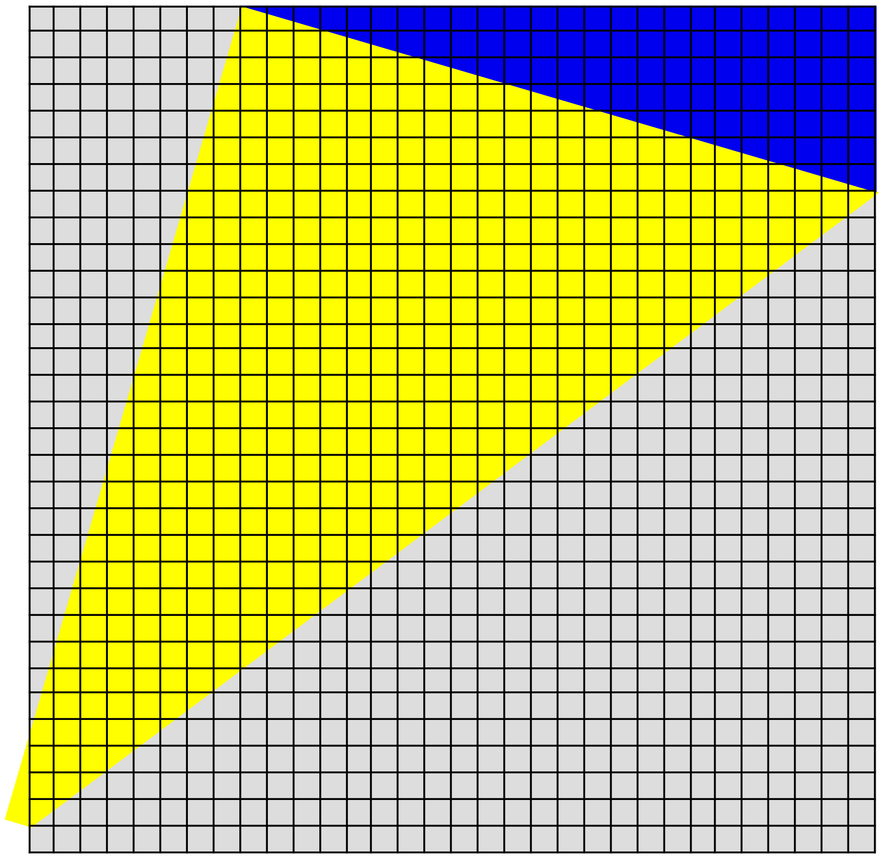
Wir erhalten das pythagoreische Dreieck mit $a:b:c = 7:24:25$. Weiter ist:

$$g = \tfrac{1}{2\lambda}\left(\lambda^2 - \left(2b - b^2\right)\right) = \tfrac{1}{2}\left(1 - \left(\tfrac{6}{4} - \tfrac{9}{16}\right)\right) = \tfrac{1}{32}$$
$$h = \tfrac{1}{2\lambda}\left(\lambda^2 + \left(2b - b^2\right)\right) = \tfrac{1}{2}\left(1 + \left(\tfrac{6}{4} - \tfrac{9}{16}\right)\right) = \tfrac{31}{32}$$

Und schließlich gilt in diesem Beispiel:

$$i = \tfrac{1}{\lambda}\sqrt{\lambda^2 + b^2} = \sqrt{1 + \tfrac{9}{16}} = \tfrac{5}{4} = \tfrac{40}{32}$$

Es sind also alle beteiligten Strecken (inklusive i) in einem rationalen Verhältnis.



Situation im Raster

6.1.3 Allgemein

Allgemein ergibt sich für $b = \frac{v}{u}$:

$$a = \frac{1}{2\lambda}\left(\lambda^2 - b^2\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{v^2}{u^2}\right) = \frac{1}{2u^2}\left(u^2 - v^2\right)$$

$$c = \frac{1}{2\lambda}\left(\lambda^2 + b^2\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{v^2}{u^2}\right) = \frac{1}{2u^2}\left(u^2 + v^2\right)$$

Somit ist:

$$a : b : c = \frac{1}{2u^2}\left(u^2 - v^2\right) : \frac{2uv}{2u^2} : \frac{1}{2u^2}\left(u^2 + v^2\right) = \left(u^2 - v^2\right) : 2uv : \left(u^2 + v^2\right)$$

Das sind die üblichen Formeln zur Generierung der pythagoreischen Zahlentripel.

6.2 Das DIN-Format

Nun ist $\lambda = \sqrt{2}$. Wir erhalten die Formeln:

$$a = \frac{1}{2\lambda}\left(\lambda^2 - b^2\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(2 - b^2\right)$$

$$c = \frac{1}{2\lambda}\left(\lambda^2 + b^2\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(2 + b^2\right)$$

Ebenso:

$$g = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(2 - \left(2b - b^2\right)\right)$$

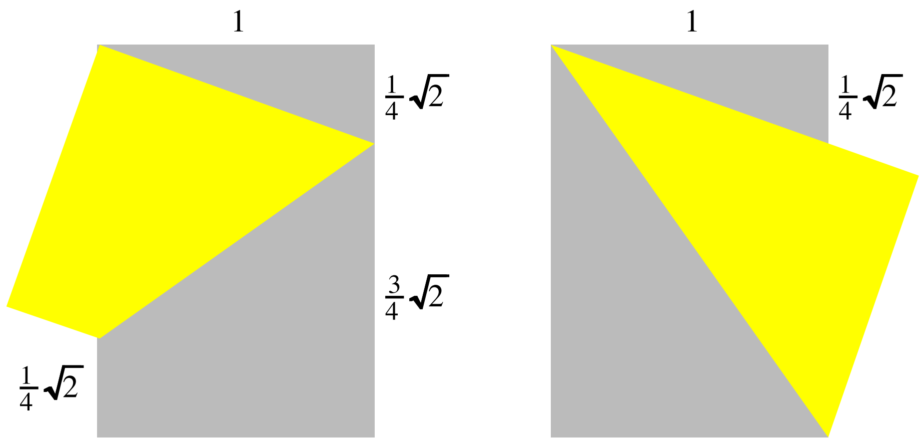
$$h = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(2 + \left(2b - b^2\right)\right)$$

Und:

$$i = \frac{1}{\lambda}\sqrt{\lambda^2 + b^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2 + b^2}$$

6.2.1 $b = 1$

Für $b = 1$ ergibt sich $\frac{a}{c} = \frac{g}{h} = \frac{1}{3}$. Dieses Beispiel verdanke ich H. S..



***b* = 1**

Statt zwei diametrale Ecken aufeinander zu falten, können wir auch längs der zugehörigen Diagonalen falten.

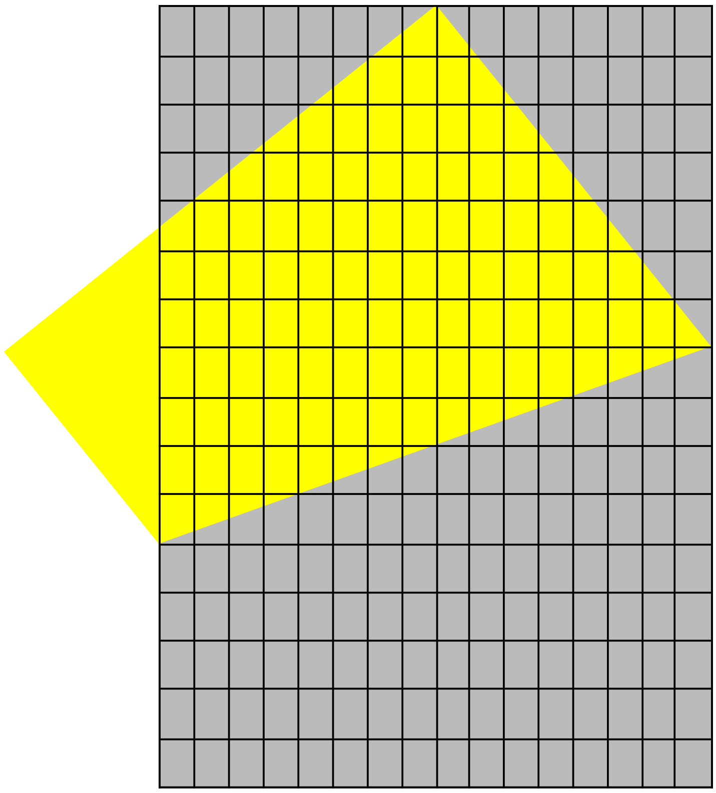
6.2.2 $b = 0.5$

Das Beispiel findet sich in
http://www.wissenschaftsreisen.de/quiz.php?rechts=quiz/quiz-2008-7.html
und
http://www.wissenschaftsreisen.de/quiz.php (Lösung des Preisrätsels vom Juli 2008)

In diesem Beispiel erhalten wir aus $b = \frac{1}{2}$:

$$a = 7\frac{\sqrt{2}}{16} \qquad c = 9\frac{\sqrt{2}}{16} \qquad g = 5\frac{\sqrt{2}}{16} \qquad h = 11\frac{\sqrt{2}}{16} \qquad i = 12\frac{\sqrt{2}}{16}$$

Es sind also — mit Ausnahme von b — alle Zahlen in einem rationalen Verhältnis zu einander. Die Figur passt in ein DIN-Raster.



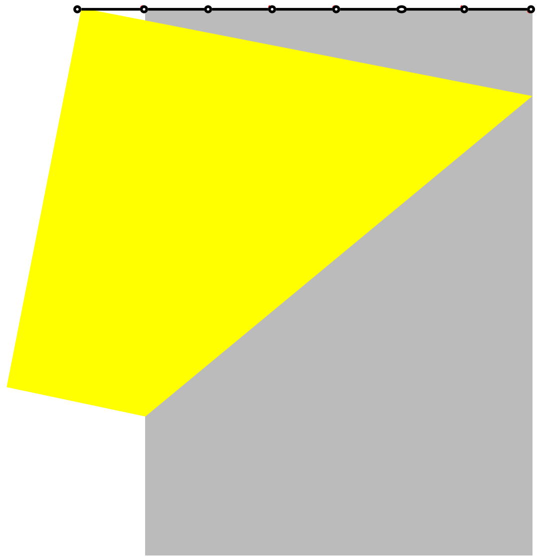
DIN-Raster

6.2.3 $b = 7/6$

Das Beispiel ist etwas subtil, indem wir für $b = \frac{7}{6}$ die Oberkante des Rechteckes nach links verlängern müssen. Wir erhalten:

$$a = 23\frac{\sqrt{2}}{144} \qquad c = 121\frac{\sqrt{2}}{144} \qquad g = 37\frac{\sqrt{2}}{144} \qquad h = 107\frac{\sqrt{2}}{144} \qquad i = 132\frac{\sqrt{2}}{144}$$

Mit Ausnahme von b stehen alle Zahlen in einem rationalen Verhältnis zueinander.



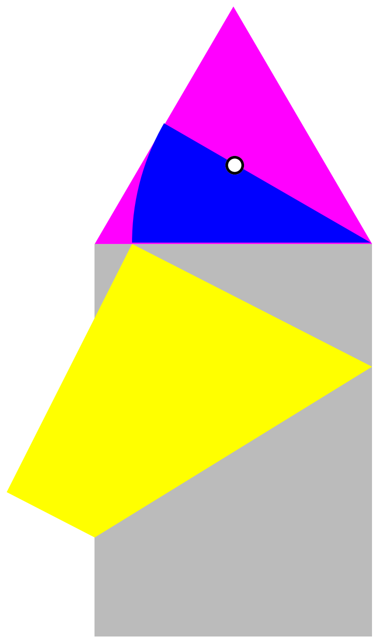
Die verlängerte Oberkante

6.2.4 Kombination mit gleichseitigem Dreieck

Wir wählen nun $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Damit ergibt sich:

$$a = 5\frac{\sqrt{2}}{16} \qquad c = 11\frac{\sqrt{2}}{16} \qquad g = \left(11 - 4\sqrt{3}\right)\frac{\sqrt{2}}{16} \qquad h = \left(5 + 4\sqrt{3}\right)\frac{\sqrt{2}}{16}$$

Wir haben am rechten Rand ein rationales Teilverhältnis, am linken Rand nicht.



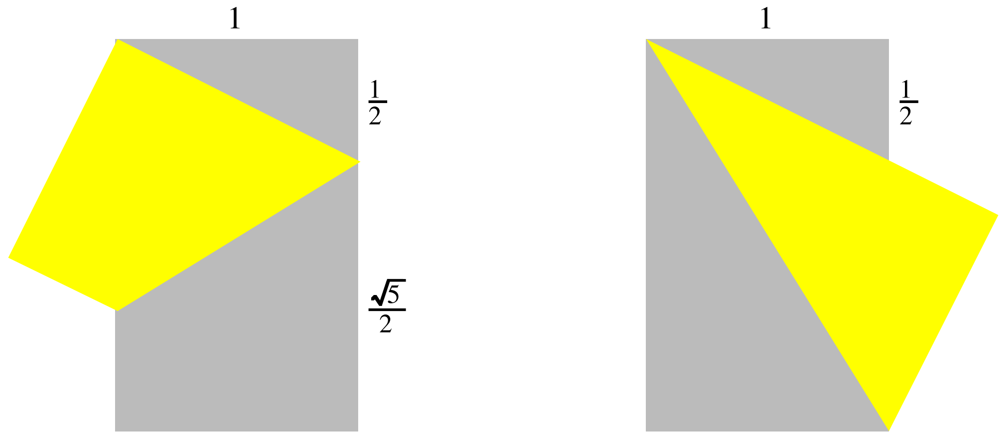
Kombination mit gleichseitigem Dreieck

6.3 Goldenes Rechteck

Nun sei $\lambda = \tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Wir erhalten:

$$a = \tfrac{1}{2} \qquad c = \tfrac{\sqrt{5}}{2} \qquad g = \tfrac{1}{2} \qquad h = \tfrac{\sqrt{5}}{2}$$

Wir haben keine rationalen Verhältnisse auf der linken und der rechten Rechtecksseite.



Goldenes Rechteck

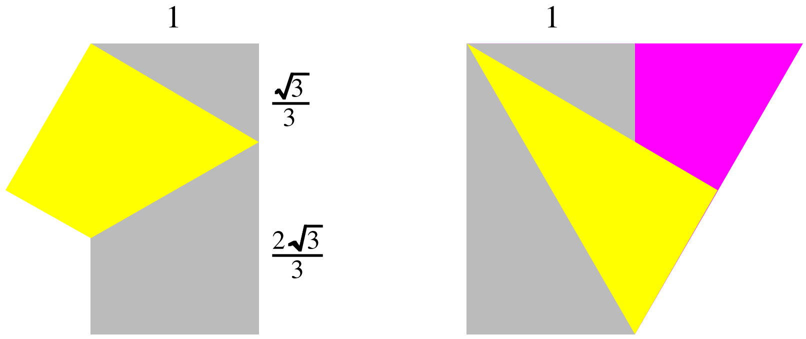
Statt zwei diametrale Ecken aufeinander zu falten, können wir auch längs der Diagonalen falten.

6.4 Wurzel-3-Rechteck

Wir arbeiten mit $\lambda = \sqrt{3}$ und $b = 1$. Das ergibt:

$$a = \tfrac{\sqrt{3}}{3} \qquad c = 2\tfrac{\sqrt{3}}{3} \qquad g = \tfrac{\sqrt{3}}{3} \qquad h = 2\tfrac{\sqrt{3}}{3} \qquad i = 2\tfrac{\sqrt{3}}{3}$$

Mit Ausnahme von b stehen alle Zahlen (inklusive i) in einem rationalen Verhältnis zueinander.



Gleichseitiges Dreieck

Statt zwei diametrale Ecken aufeinander zu falten, können wir auch längs der Diagonalen falten. Dann können wir zum gleichseitigen Dreieck ergänzen. Das Teilverhältnis am rechten Rand entspricht dem Teilverhältnis der Schwerlinien.