

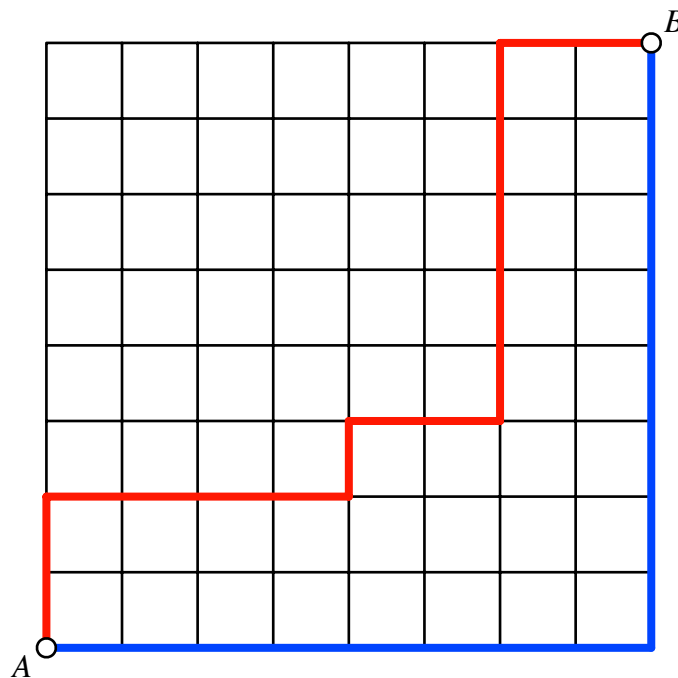
Hans Walser, [20130223]

## Falscher Grenzwert

Anregung: Frühstücksgespräch in Paderborn.

### 1 Taxi Cab Geometry

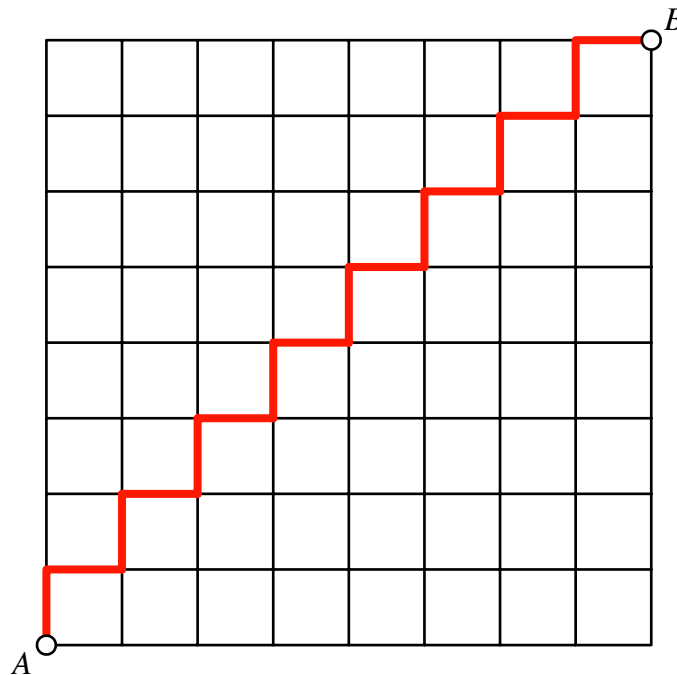
In einer Stadt mit nur waagerechten und senkrechten Straßen (Abb. 1) sind zwei Wege von  $A$  nach  $B$  eingezeichnet.



**Abb. 1: Taxi Cab Geometry**

Welcher der beiden Wege ist der kürzere? Welches ist der überhaupt kürzeste Weg von  $A$  nach  $B$ ?

Schüler haben nun den roten Weg als kürzeren vorzuschlagen und als kürzesten Weg überhaupt einen Treppenweg (Abb. 2), denn dieser ist am nächsten bei der Diagonalen.



**Abb. 2: Treppenweg**

Bei unendlich verkleinerter Maschenweite oder unendlich vergrößerter Stadt wird der Treppenweg zur Diagonalen, womit sich im Limes gegenüber dem blauen Weg der Abbildung 1 eine Reduktion der Weglänge auf

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 70.71\%$$

ergibt.

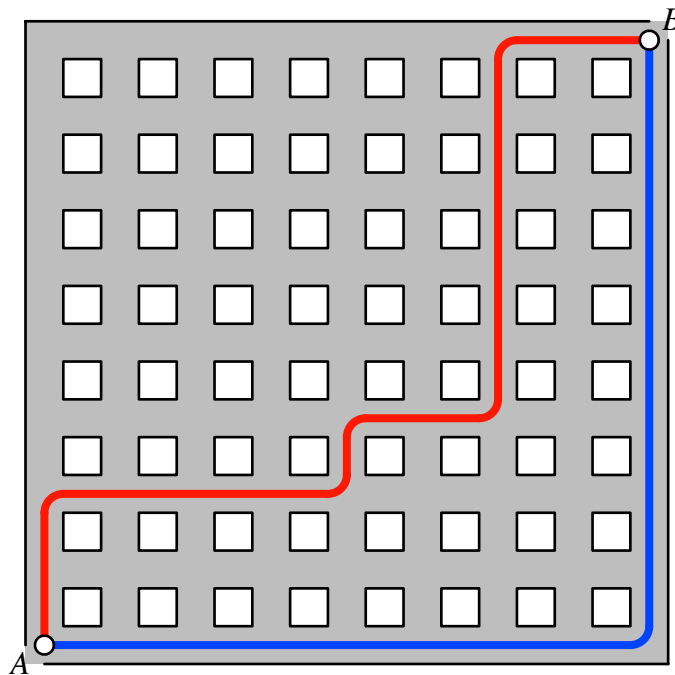
Haha lacht nun der Lehrer, die Wege sind alle gleich lang, wie man durch senkrechte Projektion der waagerechten Weganteile nach unten und entsprechende Projektion der senkrechten Weganteile nach rechts erkennt. Der Grenzwert ist also falsch.

## 2 Annäherung an die Realität

### 2.1 Kurvenfahren

In Wirklichkeit fährt niemand orthogonal durch die Stadt. In der Abbildung 3 sind die Straßen mit einer gewissen Breite eingezeichnet und darin der blaue und der rote Weg der Abbildung 1. Dabei sind allerdings die folgenden Vereinfachungen getroffen:

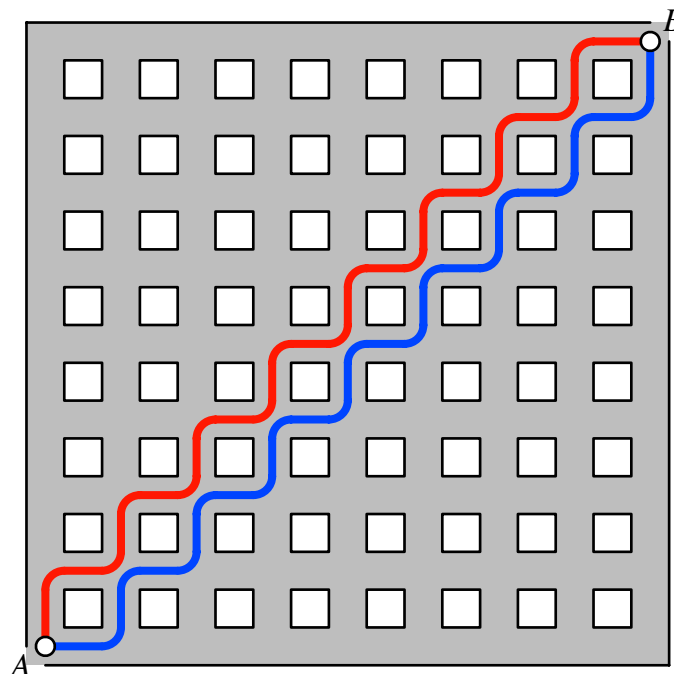
- (1) Die Autos fahren in der Straßenmitte, was in der Realität nicht empfehlenswert ist.
- (2) Die Autos fahren in Viertelkreisen um die Kurve. In der Realität tun sie das mit Klothoidenbögen.



**Abb. 3: Annäherung an die Realität**

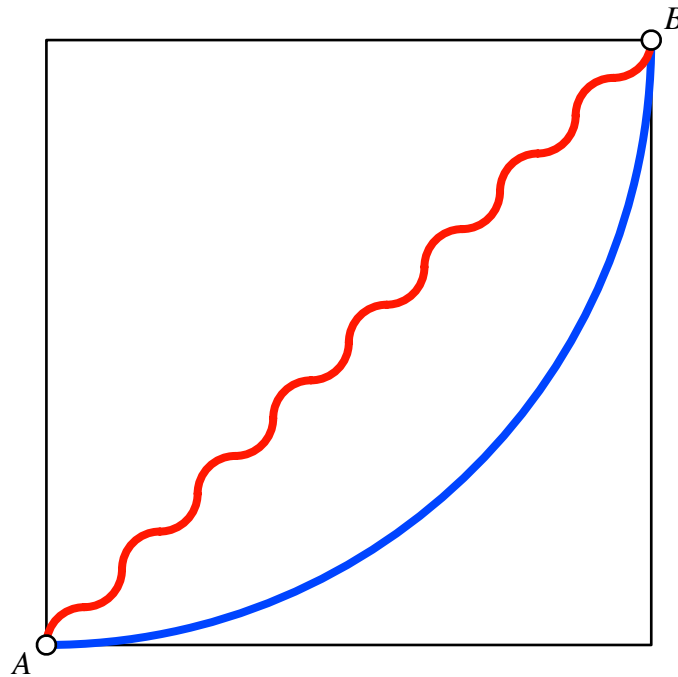
Nun ist es so, dass wir bei jeder Kurve gegenüber dem orthogonalen Weg eine Wegverkürzung herausfahren. Je mehr Kurven, umso kürzer. Der rote Weg ist also kürzer als der blaue. Der blaue Weg ist allerdings schneller, da mit höherem Tempo gefahren werden kann.

Die Abbildung 4 zeigt die beiden Minimalwege.



**Abb. 4: Minimalwege**

In einer idealen Stadt, die nur noch aus Straßen besteht, ist ein optimaler Weg aus Viertelkreisen ohne geradlinige Zwischenstücke zusammengesetzt. Seine Länge ist gleich der Länge eines einzigen Viertelkreises von  $A$  nach  $B$  (Abb. 5). Warum?

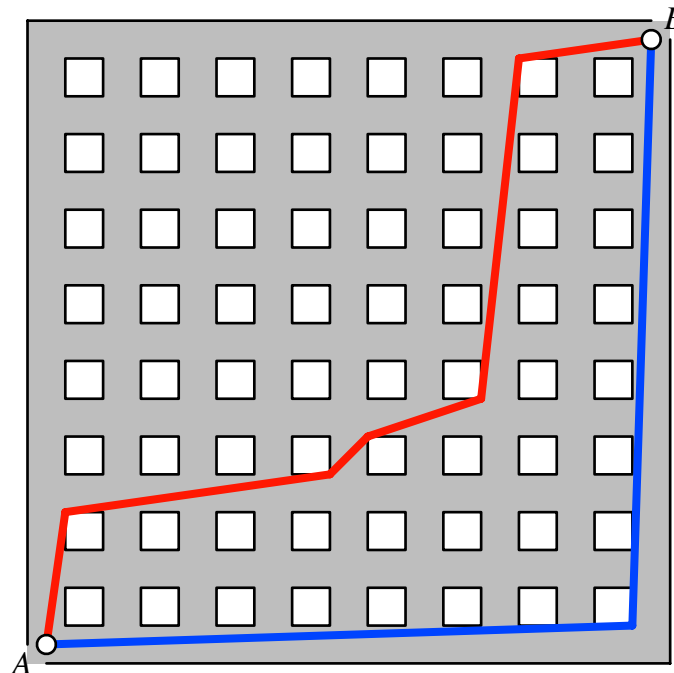


**Abb. 5: Schlangenweg**

Das ist zwar länger als die Diagonale, aber deutlich kürzer als der blaue Weg der Abbildung 1.

## 2.2 Fußgängerzone

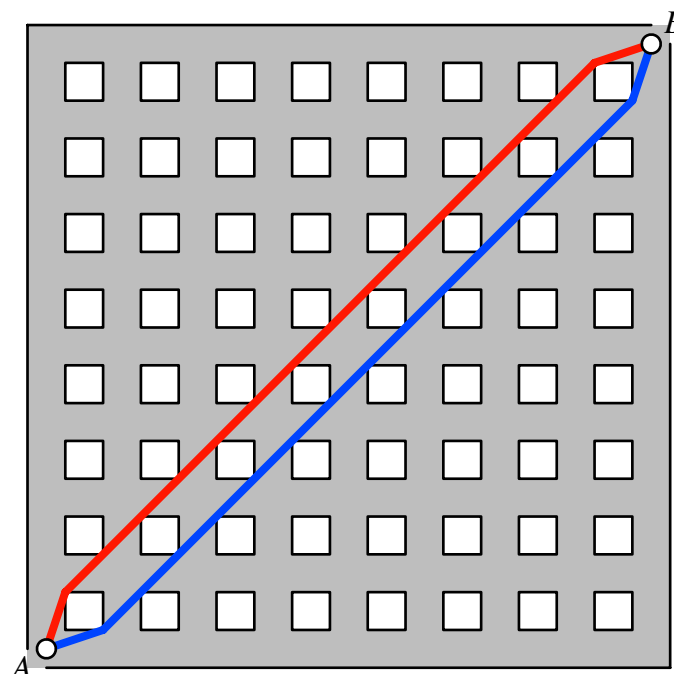
In einer Fußgängerzone gestaltet sich die Situation gemäß Abbildung 6.



**Abb. 6: In der Fußgängerzone**

Der rote Weg ist kürzer als der blaue. Wer Lust hat, kann das nachrechnen.

Die Abbildung 7 zeigt die beiden Minimalwege. Das ist nun schon fast die Diagonale.



**Abb. 7: Minimalwege**