Hans Walser, [20121230]

Falscher Grenzwert

Es sei:

$$f(x) = x - x\sqrt{1 - \tfrac{1}{x}}$$

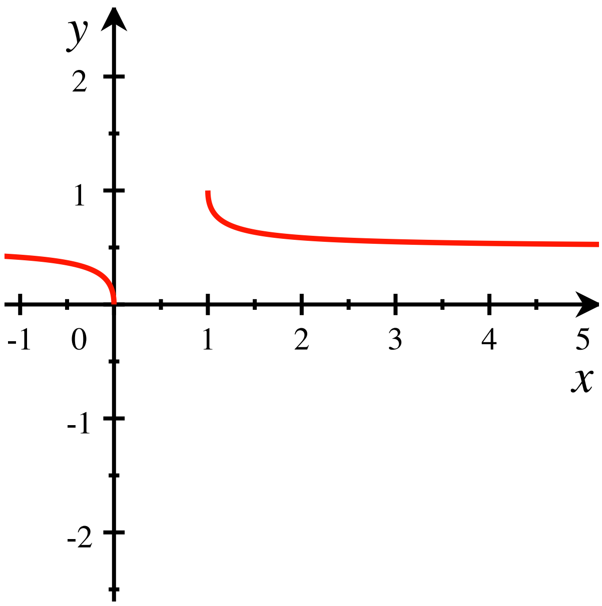
Gesucht ist der Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(x - x\sqrt{1-\tfrac{1}{x}}\right)$.

Falsche Überlegung

Zunächst ist $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{1-\tfrac{1}{x}} = 1$. Somit wird:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(x - x\sqrt{1-\tfrac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to\infty}(x - x) = 0$$

Allerdings sieht der Funktionsgraf so aus:



Funktionsgraf

Aus dem Funktionsgraf ergibt sich die Vermutung: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \frac{1}{2}$. Auch die Werteta-belle bestätigt diesen Befund:

x	f(x)
1	1.00000000
10	0.51316702
100	0.50125629
1000	0.50012506
10000	0.50001250
100000	0.50000125
1000000	0.50000012

Wo liegt der Fehler?

Richtige Überlegung

Die zweistufige Limesbildung ist nicht korrekt.

Erster Lösungsweg

Wir formen den Funktionsterm um:

$$f(x) = x - x\sqrt{1-\tfrac{1}{x}} = \frac{x-x\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{1} \cdot \frac{x+x\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{x+x\sqrt{1-\frac{1}{x}}} = \frac{x^2-x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x+x\sqrt{1-\frac{1}{x}}} = \frac{x}{x+x\sqrt{1-\frac{1}{x}}} = \frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}$$

Damit wird:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{x}}} = \frac{1}{2}$$

Zweiter Lösungsweg

Wir formen das Problem mit der Substitution $x = \frac{1}{t}$ um. Aus $\lim\limits_{x\to\infty}$ wird dann $\lim\limits_{t\to 0}$ und weiter:

$$f(t) = \frac{1-\sqrt{1-t}}{t}$$

Für $\lim\limits_{t\to 0}$ ergibt sich eine „null zu null“-Situation; wir müssen die Regel von Bernoulli-de l’Hôpital anwenden:

$$\lim_{t\to 0} \frac{1-\sqrt{1-t}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{-\frac{-1}{2\sqrt{1-t}}}{1} = \frac{1}{2}$$