

Hans Walser, [20180810]

Falsche Schraubenlinie

Anregung: Wunder (2018)

1 Worum geht es?

Der Handlauf eines Treppengeländers konstanter Steigung, das aber „um die Ecke geht“, kann an der Ecke durch einen Bogen abgerundet werden. Was kann über die Steigung auf diesem Bogenstück gesagt werden?

Es zeigt sich, dass die Steigung auf dem Bogenstück größer ist als die konstante Steigung auf den geraden Stücken.

Es wird exemplarisch mit dem einfachsten Fall ausgehen von der Steigung 1, gearbeitet. Dabei treffen wir auf das DIN-Format und den kristallografischen Winkel.

2 Echte Schraubenlinie

Die Abbildung 1a zeigt eine echte Schraubenlinie mit der Steigung 1 (also dem Steigungswinkel 45°). Die Schraubenlinie liegt auf einem Kreiszyylinder.

Die Abbildung 1b zeigt die zugehörige Abwicklung.

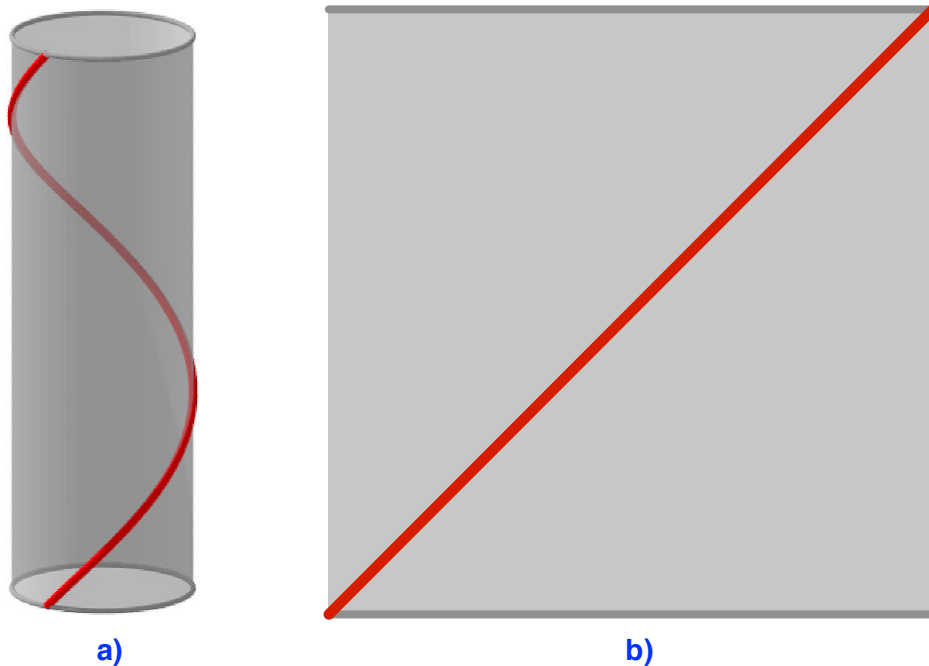


Abb. 1: Schraubenlinie und Abwicklung

3 Eckige Schraubenlinie

Die Abbildung 2 zeigt einen Würfel mit einer übereck laufenden roten Linie.

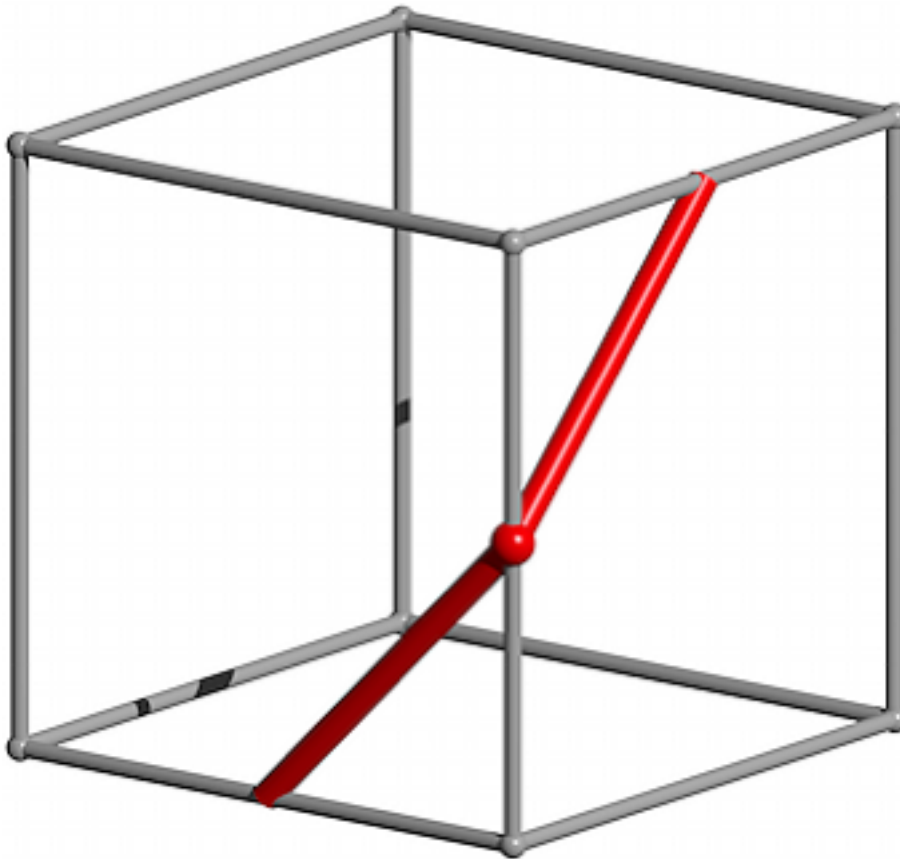


Abb. 2: Würfel mit roter Linie

Wenn wir vier solche Figuren der Abbildung 2 je um 90° verdreht aufeinandersetzen, erhalten wir eine eckige Schraubenlinie (Abb. 3a).

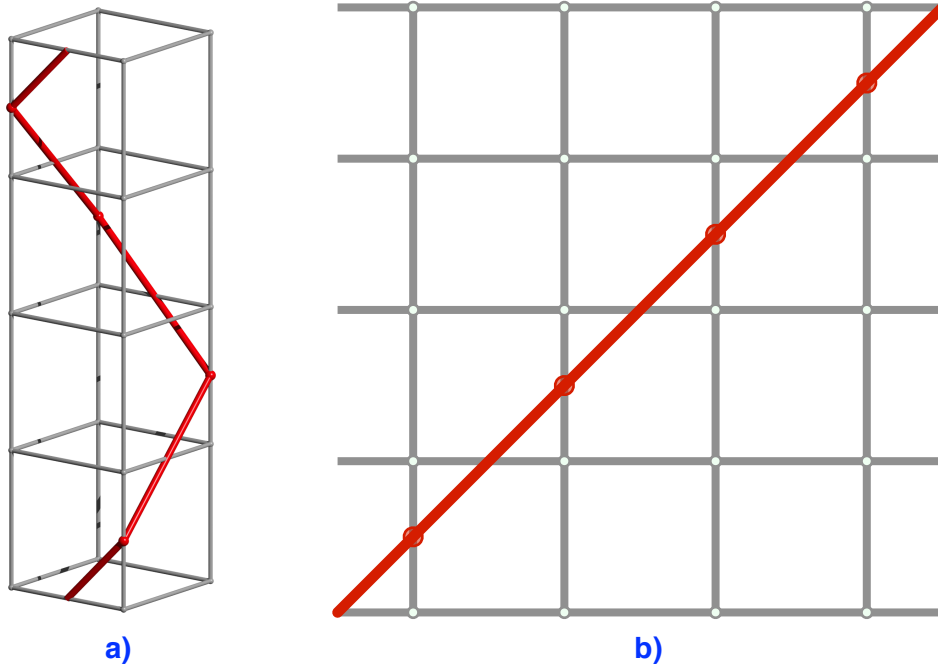


Abb. 3: Eckige Schraubenlinie. Abwicklung

Die Abbildung 3b zeigt die Abwicklung dieser eckigen Spirale. Sie ist wesentlich dieselbe Figur wie die Abwicklung der Schraubenlinie (Abb. 1b). Die Steigung ist ebenfalls konstant 1, der Steigungswinkel 45° .

4 Abrundung durch einen Bogen

Die beiden roten Teilstrecken der Abbildung 2 schließen einen Winkel ein, allerdings keinen rechten Winkel. Um diesen Winkel zu bestimmen, ergänzen wir die Figur mit vier weiteren analogen Teilstrecken zu einem regelmäßigen Sechseck (Abb. 4).

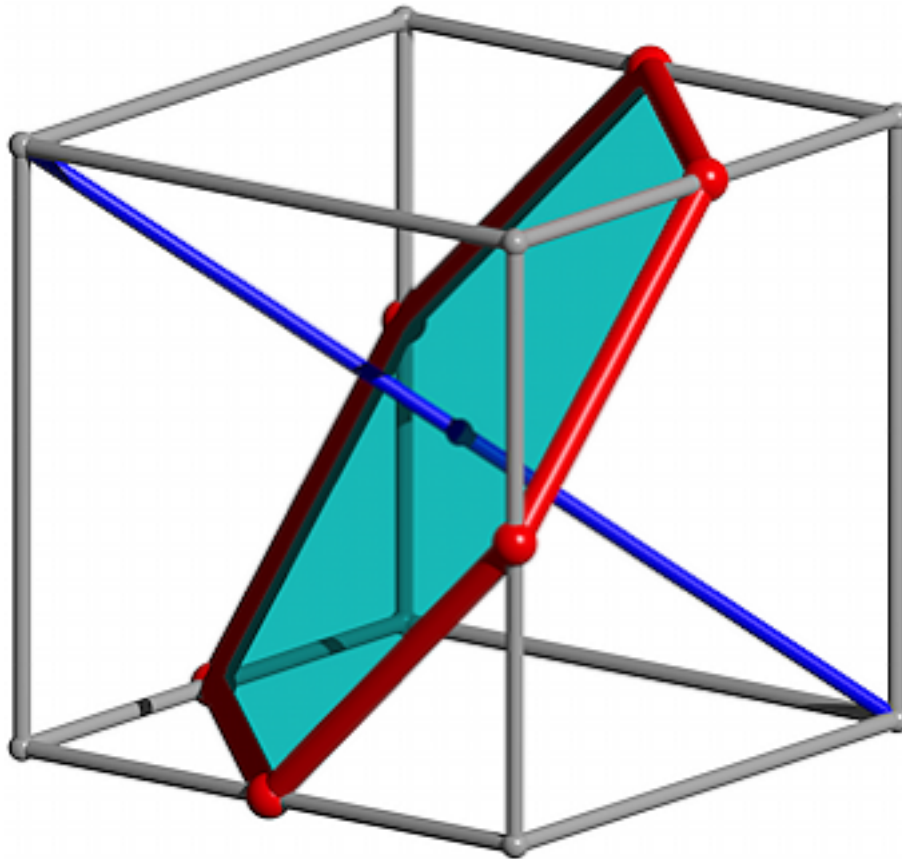


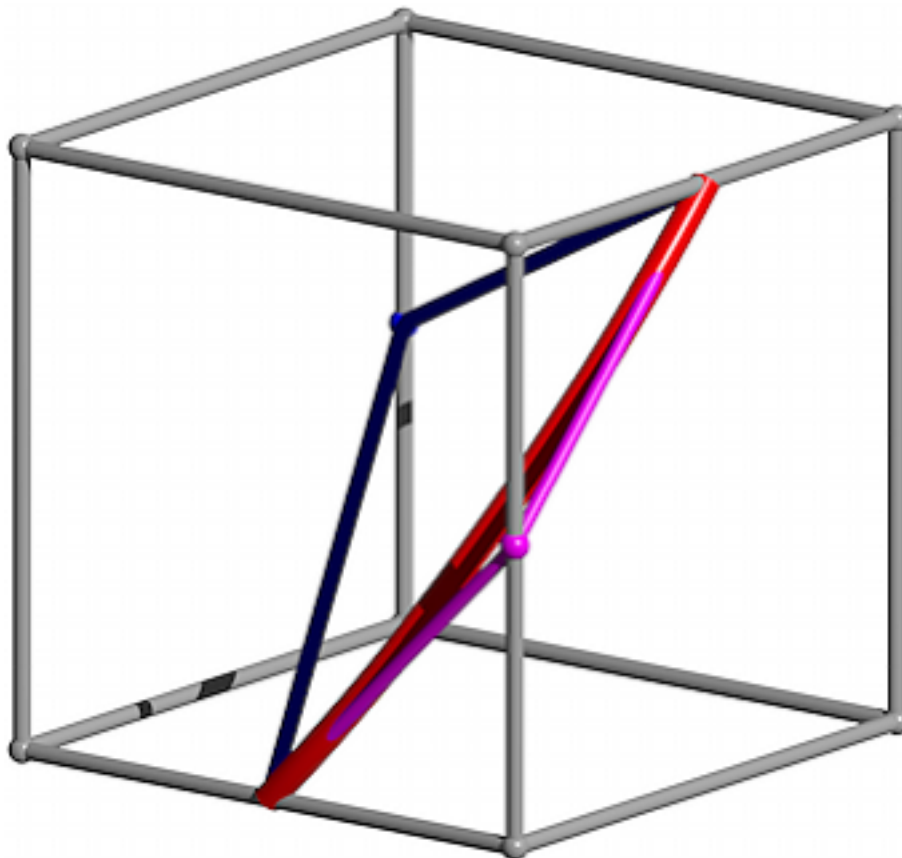
Abb. 4: Regelmäßiges Sechseck

Das Sechseck ist die Schnittfigur des Würfels mit der Mittelnormalebene der eingezeichneten Würfeldiagonale.

Die Außenwinkel des regelmäßigen Sechsecks sind 60° . Dies ist die Richtungsänderung zweier aufeinanderfolgender roten Strecken.

Wir können also die durch die beiden roten Teilstrecken der Abbildung 2 gebildete Ecke durch einen 60° -Bogen abrunden. Der Radius dieses Bogens ist frei. Wir wählen ihn gemäß Abbildung 5.

In der Abbildung 5 sind zusätzlich das Zentrum und die Grenzradien des Bogens eingezeichnet. Der Bogen ist *nicht* Teil des Inkreises des regelmäßigen Sechsecks der Abbildung 4.

**Abb. 5: Bogen**

5 Falsche Schraubenlinie

5.1 Ansicht

Wenn wir vier solche Figuren der Abbildung 5 je um 90° verdreht aufeinandersetzen, erhalten wir eine falsche Schraubenlinie (Abb. 6b). Sie ist aus vier 60° -Bögen zusammengesetzt.

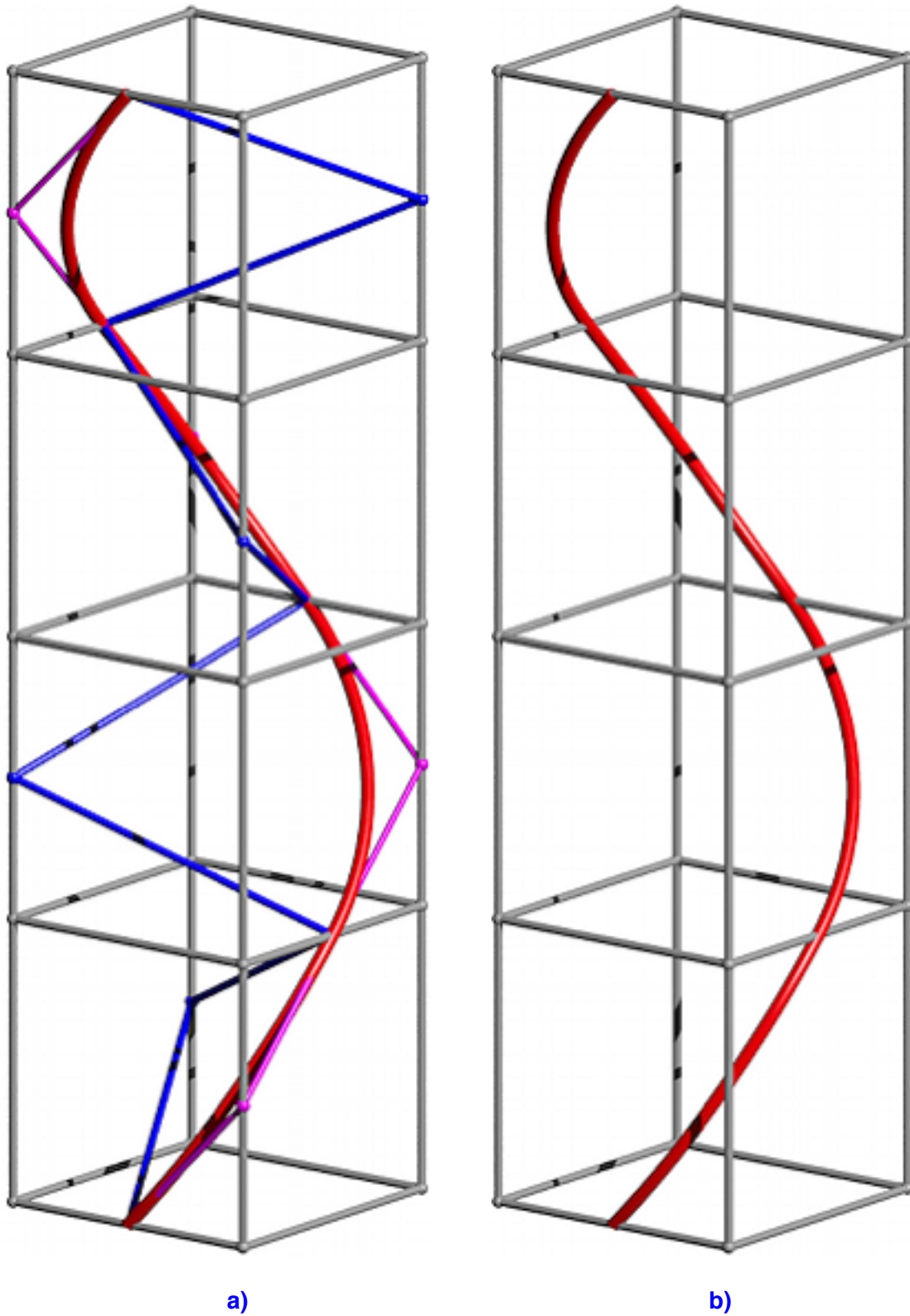


Abb. 6: Falsche Schraubenlinie

5.2 Steigung

In der Abbildung 6a ist in magenta die eckige Schraubenlinie der Abbildung 3 sichtbar. Die falsche Schraubenlinie ist kürzer (sie läuft der eckigen Schraubenlinie den Rank ab), schafft aber dieselbe Höhendifferenz. Sie hat daher im Mittel eine größere Steigung als die eckige Schraubenlinie.

5.3 Sicht von oben

Die Abbildung 7 zeigt die Sicht von oben.

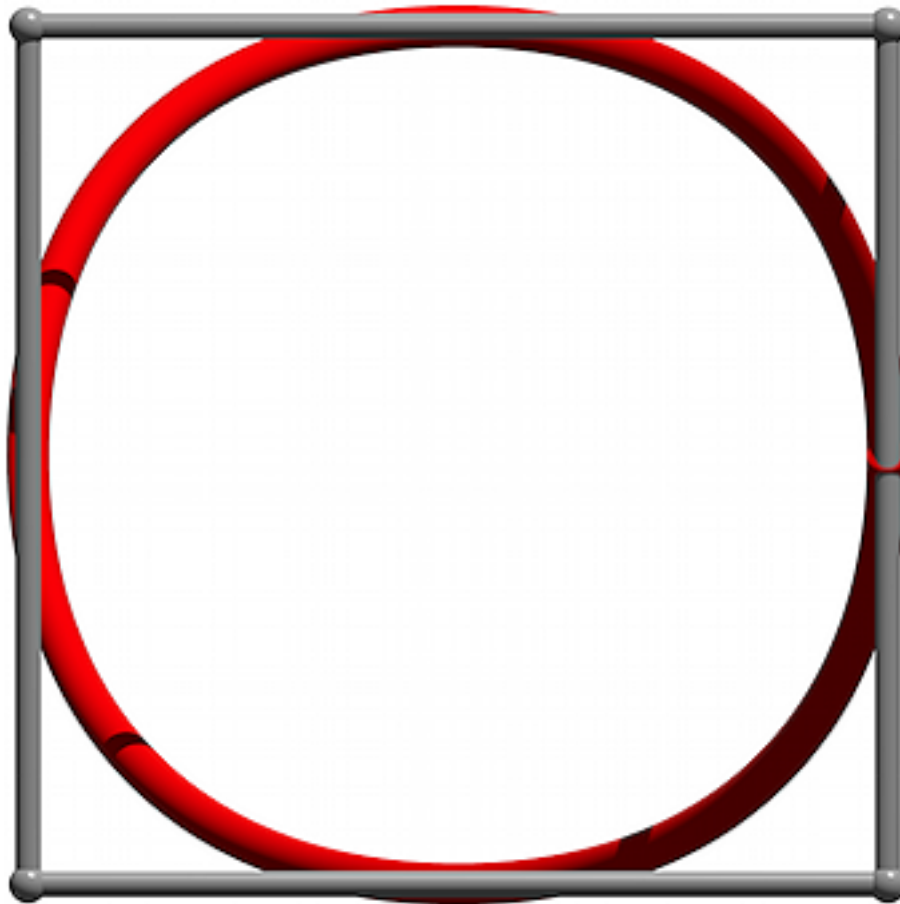


Abb. 7: Sicht von oben

Die falsche Schraubenlinie läuft nicht mehr auf einem Kreiszyylinder, sondern auf einem Zylinder, dessen Leitlinie durch vier Ellipsenbögen gebildet ist – die Normalprojektion eines „schrägen“ Kreisbogens ist ja ein Ellipsenbogen. Die zugehörigen Ellipsen haben das Achsenverhältnis $\sqrt{3}:1$. Solche Ellipsen treten in vielen Zusammenhängen auf und haben einige bemerkenswerte geometrische Eigenschaften [1], [2], [3].

Die Abbildung 8 zeigt die vier Ellipsen in extenso. Von bloßem Auge ist die Innenfigur kaum von einem Kreis zu unterscheiden.

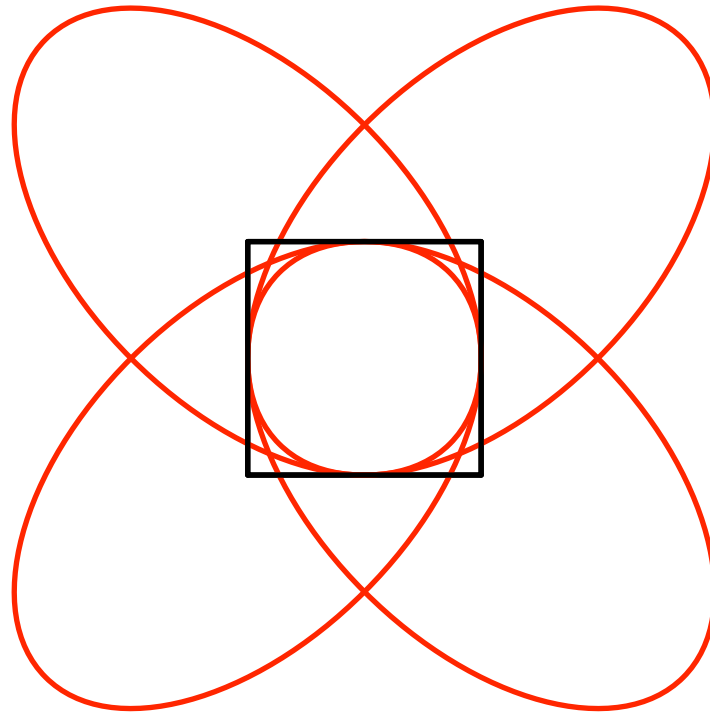


Abb. 8: Die vier Ellipsen

Für die Berechnung des Umfanges der Leitlinie des Trägerzylinders benötigen wir daher elliptische Integrale. Dies macht die Konstruktion der Abwicklung zu einer spannenden Angelegenheit.

5.4 Abwicklung

Die Abbildung 9b zeigt die Abwicklung des Trägerzylinders der falschen Schraubenlinie. Die falsche Schraubenlinie wird nicht auf eine Quadratdiagonale abgebildet. Ihre Steigung ist im Mittel größer als 1. Die Steigung ist nicht mehr konstant. Es geht wie beim Radetzky Marsch über's Waschbrett ab.

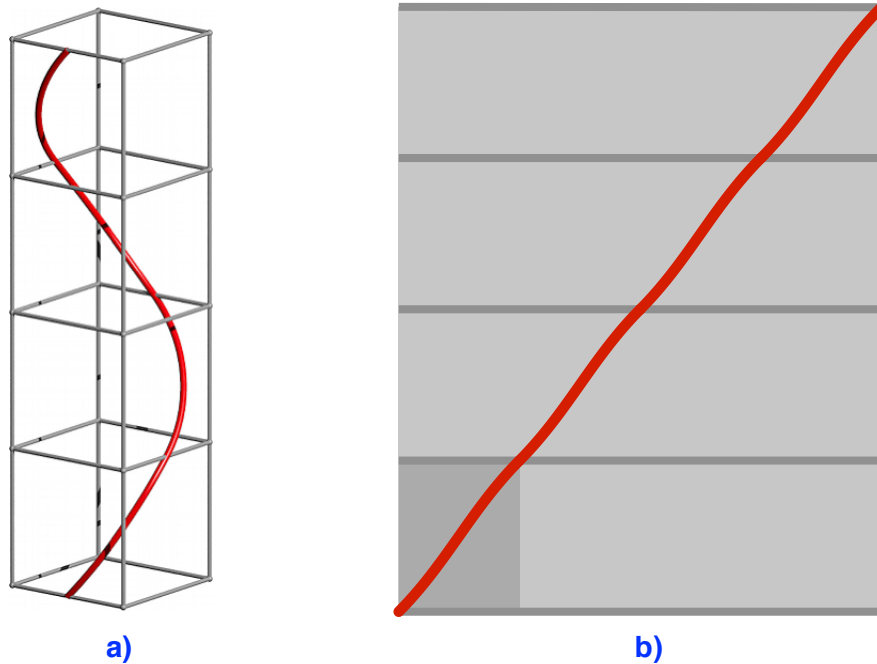


Abb. 9: Abwicklung der falschen Schraubenlinie

Die Abbildung 10 zeigt den in der Abbildung 9b etwas dunkler markierten Ausschnitt. Am Anfang und am Ende haben wir die Steigung 1 und den Steigungswinkel 45° . An der steilsten Stelle haben wir die Steigung $\sqrt{2}$ und den zugehörigen Steigungswinkel:

$$\arctan(\sqrt{2}) \approx 54.7356^\circ \quad (1)$$

Dies ist auch die Steigung einer Diagonale in einem DIN A4-Papier im Hochformat. Über das DIN-Format siehe Walser (2013).

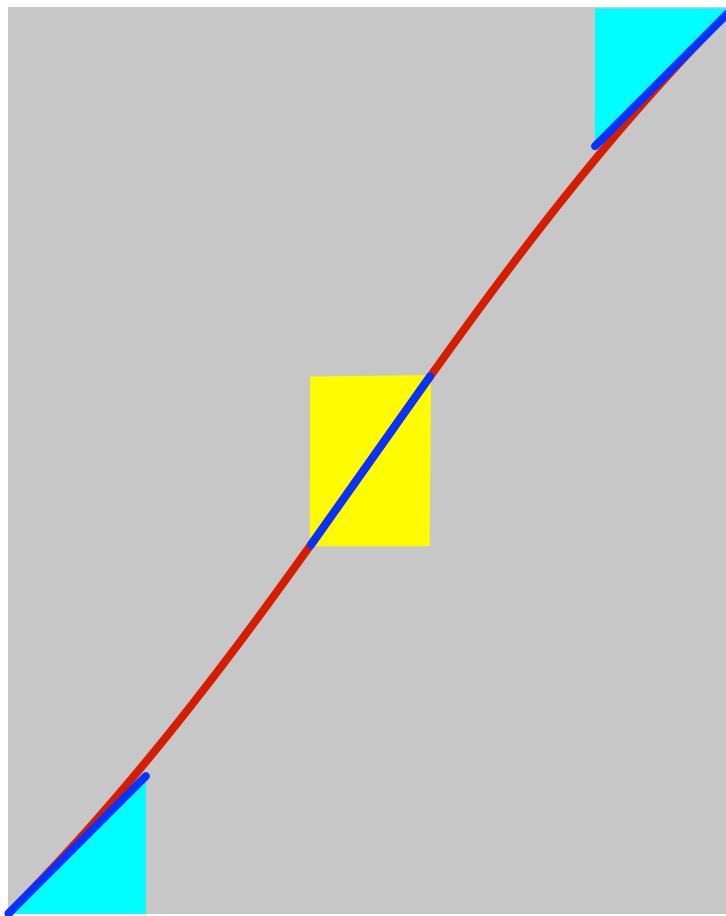


Abb. 10: Abwicklung, Ausschnitt

5.5 Torsion

Ein einzelner Bogen der falschen Schraubenlinie ist natürlich eine ebene Figur. Beim Übergang von einem Bogen zum nächsten werden die Trägerebenen der Bogen verdreht (Abb. 11). Wir haben eine Torsion.

Der Torsionswinkel ist der Spitzenwinkel im gleichschenkligen Dreieck der Abbildung 11. Wir erhalten:

$$\text{Torsionswinkel} = 2 \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}\right) \approx 70.5288^\circ \quad (2)$$

Dieser Winkel tritt auch im kristallografischen Kontext auf. Er ist auch der Diederwinkel im regulären Tetraeder. Ebenso ist es der Schnittwinkel der beiden Diagonalen in einem DIN A4-Papier.

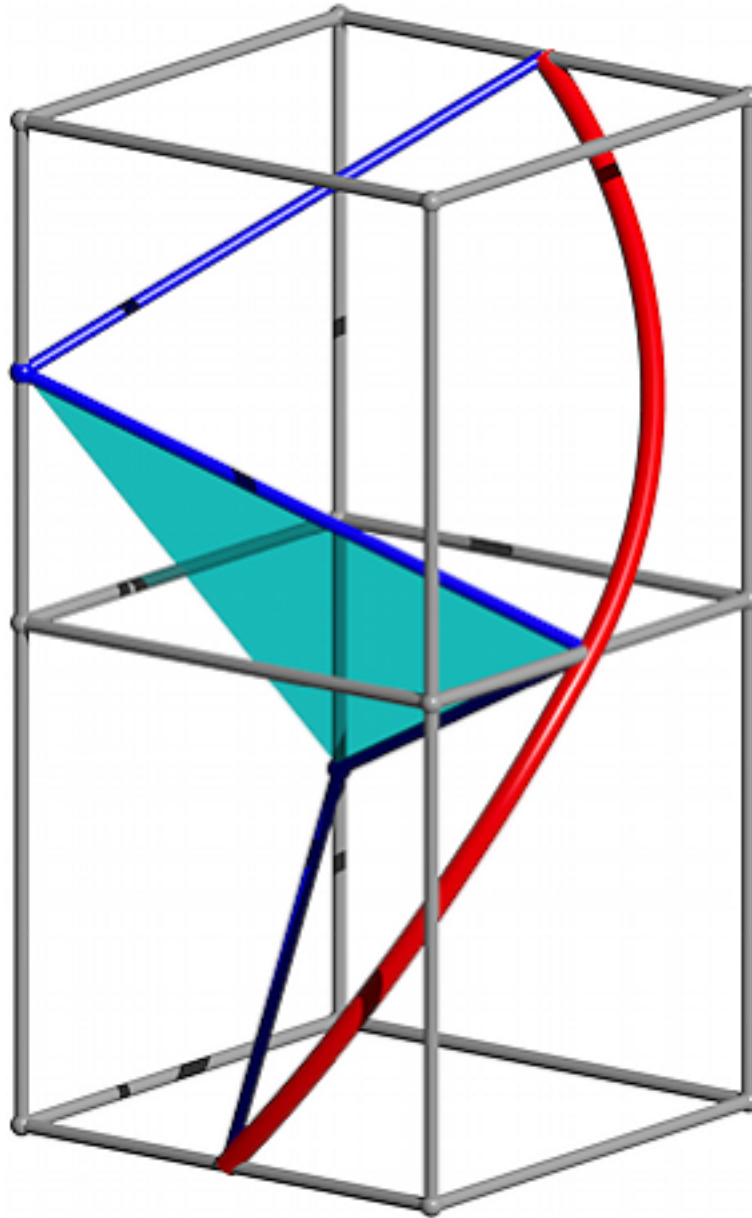


Abb. 11: Torsion

Diese sprunghafte Torsion macht die falsche Schraubenlinie als Approximation der Schraubenlinie unbrauchbar. Die Schraubenlinie muss eine konstante Krümmung und eine konstante Torsion haben. Sonst klemmt es beim Schrauben.

Literatur

Walser, Hans (2013): *DIN A4 in Raum und Zeit*. Silbernes Rechteck – Goldenes Trapez – DIN-Quader. Leipzig: EAGLE, Edition am Gutenbergplatz. ISBN 978-3-937219-69-1.

Wunder, Michael A. (2018): Treppengeländer und analytische Geometrie. *MNU Journal* 4.2018, 233-237.

Websites

[1] Hans Walser: Orthogonale Großkreise in isometrischer Darstellung

www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/O/Orth_Grosskreise/Orth_Grosskreise.htm

[2] Hans Walser: Kreise und Ellipsen

www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/K/Kreise_u_Ellipsen/Kreise_u_Ellipsen.htm

[3] Hans Walser: Rochelle-Ellipse

www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/R/Rochelle/Rochelle.htm