

Hans Walser, [20120331]

Fakultäten

Welche Folge entsteht durch die folgende Rekursion?

$$p_0 = 1$$

$$p_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p_{n-k} p_k$$

Bearbeitung

Mit dem Programm

```
N:=8: // Obergrenze

p[0]:=1:

for n from 0 to N do
  p[n+1]:=sum(binomial(n,k)*p[n-k]*p[k], k=0..n):
end_for:

for n from 0 to N do
  print(n,p[n]);
end_for:
```

erhalten wir:

```
0, 1
1, 1
2, 2
3, 6
4, 24
5, 120
6, 720
7, 5040
8, 40320
```

Wir vermuten: $p_n = n!$

Beweis induktiv:

(I) $p_0 = 1 = 0!$

(II) Sei $p_n = n!$. Eingesetzt in die Rekursionsformel ergibt:

$$p_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p_{n-k} p_k = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!k!} (n-k)!k! = \sum_{k=0}^n n! = (n+1)n! = (n+1)!$$