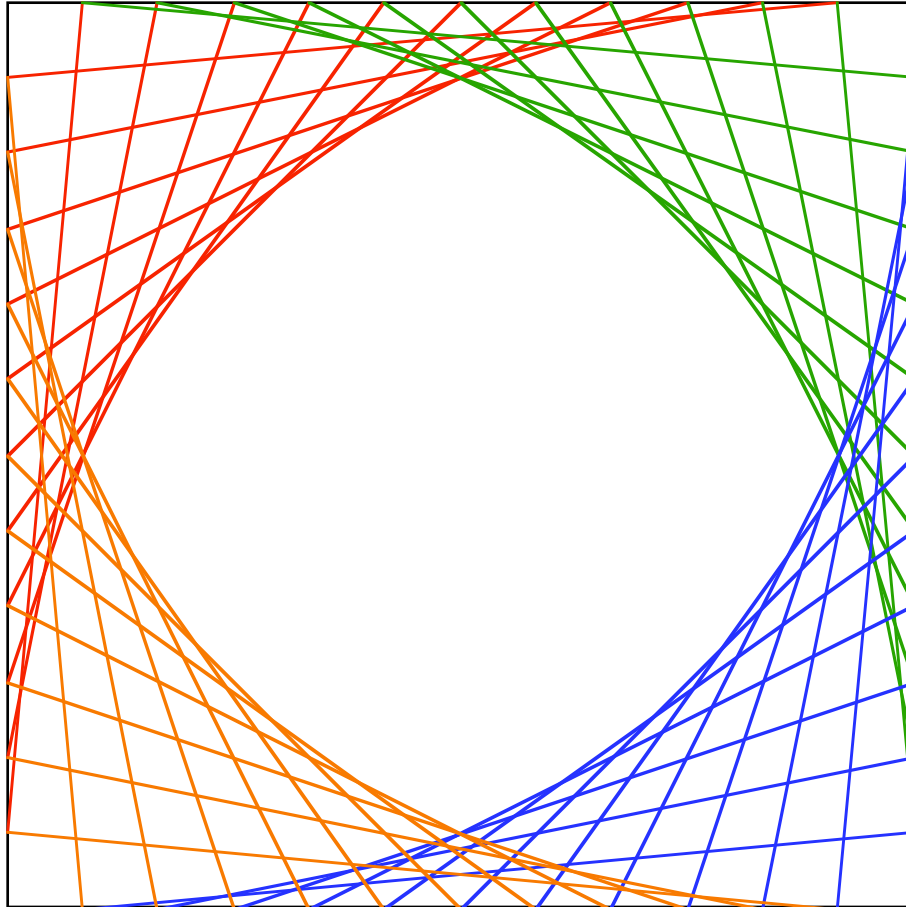


Hans Walser, [20090410a]

Fadengrafik

Welche Kurve hüllen die Fäden gleicher Farbe ein?

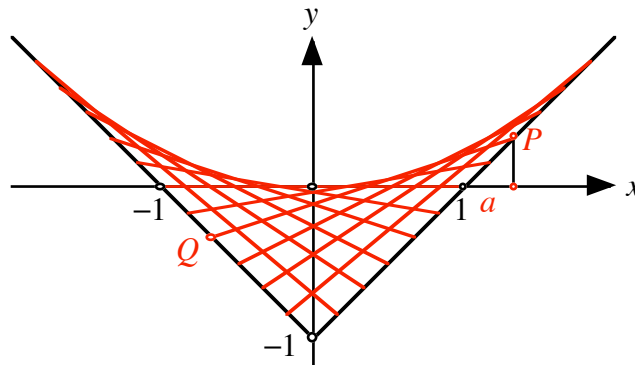


Fadengrafik

Bearbeitung

Die Enveloppen (Einhüllenden) sind Parabeln.

Zum Beweis legen wir eine Ecke gemäß Figur ins Koordinatensystem:



Beweisfigur

Die exemplarisch eingezeichneten Punkte P und Q haben die Koordinaten:

$$P(1+a, a), Q(-1+a, -a)$$

Für die Gerade PQ ergibt sich daraus die Gleichung:

$$y = ax - a^2$$

Wir schneiden mit der infinitesimal benachbarten Geraden:

$$y = (a + da)x - (a + da)^2$$

Also:

$$ax - a^2 = (a + da)x - (a + da)^2$$

$$ax - a^2 = ax + xda - a^2 - 2ada - da^2$$

$$0 = xda - 2ada - da^2$$

$$x = 2a - da$$

Weiter ist nun:

$$y = ax - a^2 = a(2a - da) - a^2 = a^2 - ada$$

Nun ist aber:

$$x^2 = (2a - da)^2 = 4a^2 - 4ada + da^2$$

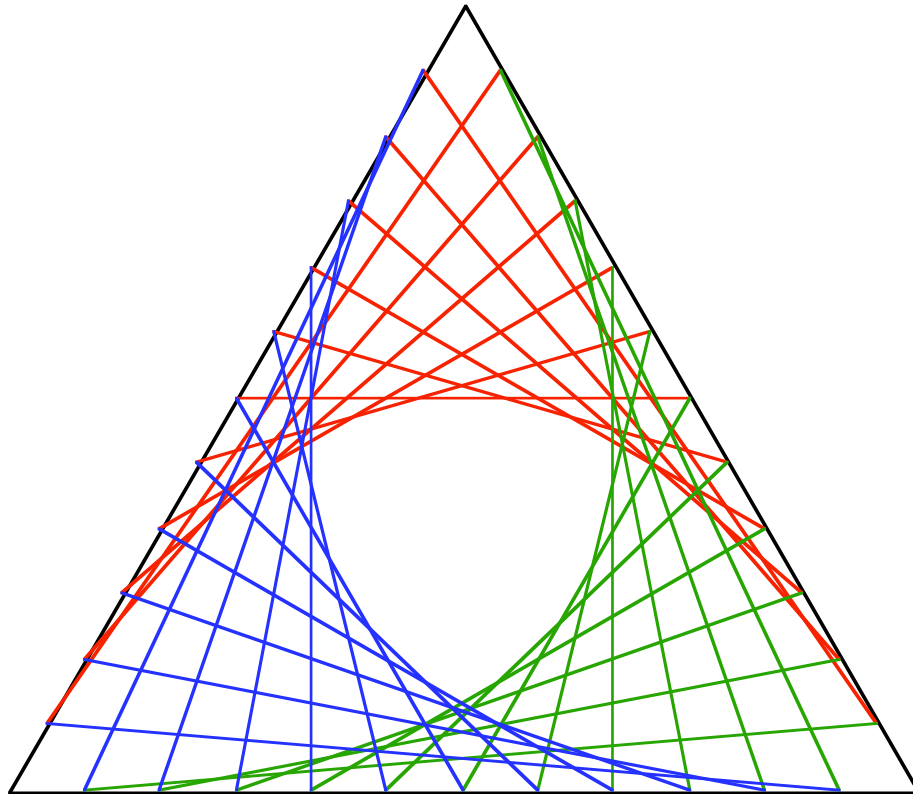
Unter Weglassung quadratischer Glieder in da folgt:

$$y = \frac{1}{4}x^2$$

Die Enveloppe ist also eine Parabel.

Bemerkungen

- a) Es handelt sich um Bézierkurven zweiten Grades.
- b) Durch affine Abbildung kann die Situation verändert werden, die Kurven bleiben aber Parabeln. Im Folgenden ein Beispiel.



Fadengrafik im Dreieck