

Hans Walser, [20140417a]

## Eulergerade

### 1 Worum geht es

Es wird eine Methode vorgestellt, wie die Eulergerade durch den Umkreismittelpunkt allein oder auch durch den Höhenschnittpunkt allein gezeichnet werden kann.

### 2 Die Eulergerade

In einem Dreieck  $A_1A_2A_3$  mit dem Umkreismittelpunkt  $U$ , dem Höhenschnittpunkt  $H$  und dem Schwerpunkt  $S$  liegen die drei Punkte auf einer Geraden, der Eulergeraden (Abb. 1, Walser, 2011, S. 11,12).

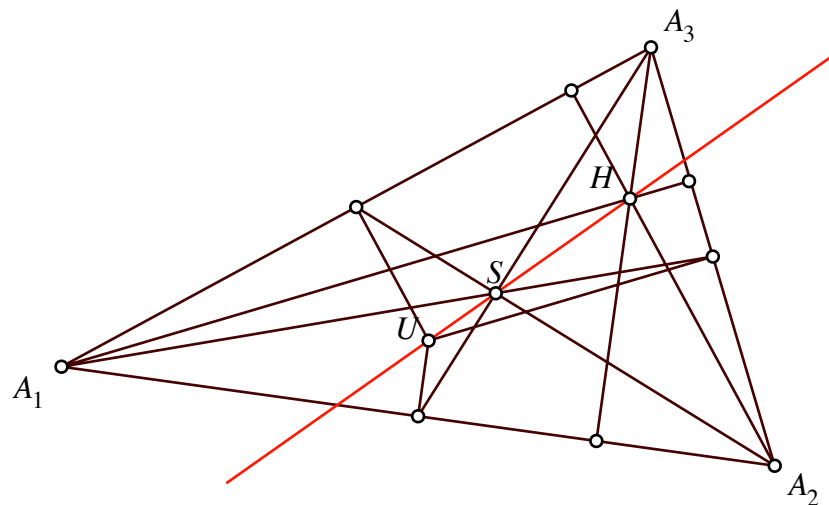


Abb. 1: Eulergerade

Die Abbildung 2 zeigt einen Beweis ohne Worte (Walser, 2007).

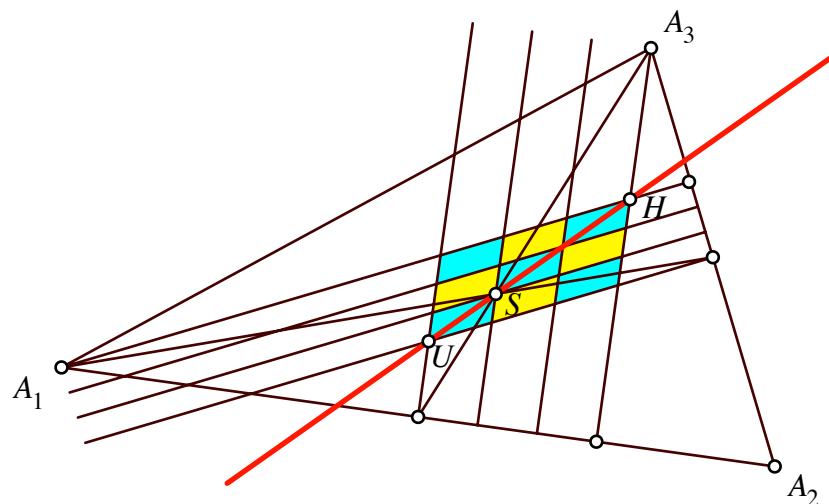


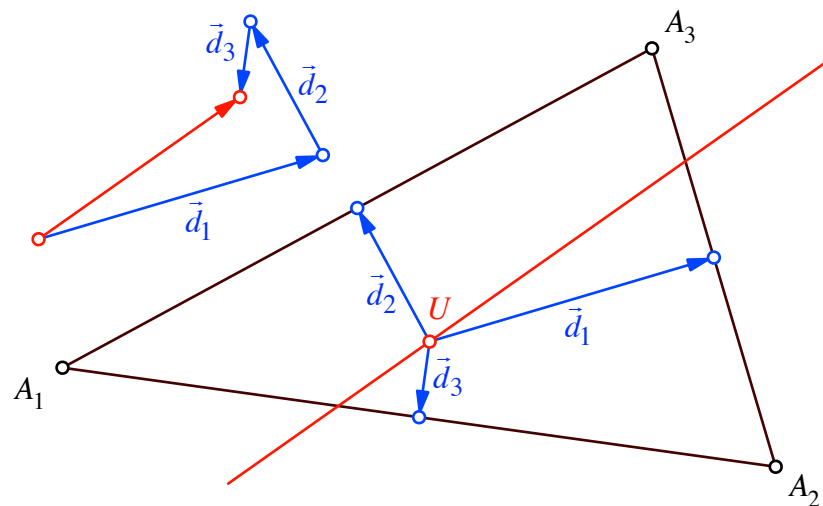
Abb. 2: Beweis ohne Worte

Für die Konstruktion der Eulergeraden genügt die Konstruktion von zweien der drei Punkte  $U$ ,  $H$ ,  $S$ .

### 3 Konstruktion mit dem Umkreismittelpunkt allein

#### 3.1 Der Richtungsvektor

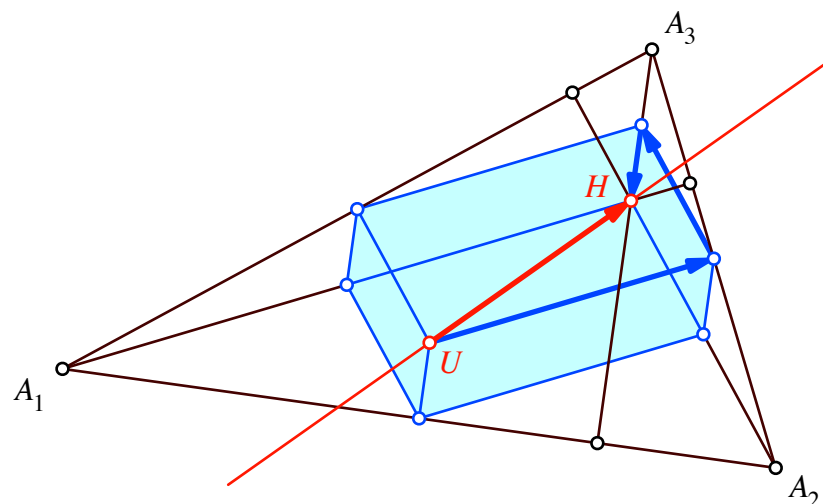
Wir konstruieren den Umkreismittelpunkt  $U$ . Damit ergeben sich die Abstandsvektoren  $\vec{d}_i$  zu den Seiten  $a_i = A_{i+1}A_{i+2}$  (Abb. 3). Die Summe dieser drei Abstandsvektoren ist ein Richtungsvektor der Eulergeraden.



**Abb. 3: Richtungsvektor der Eulergeraden**

#### 3.2 Beweis

Wir zeichnen den Feuerbach-Quader ein (Abb. 4).

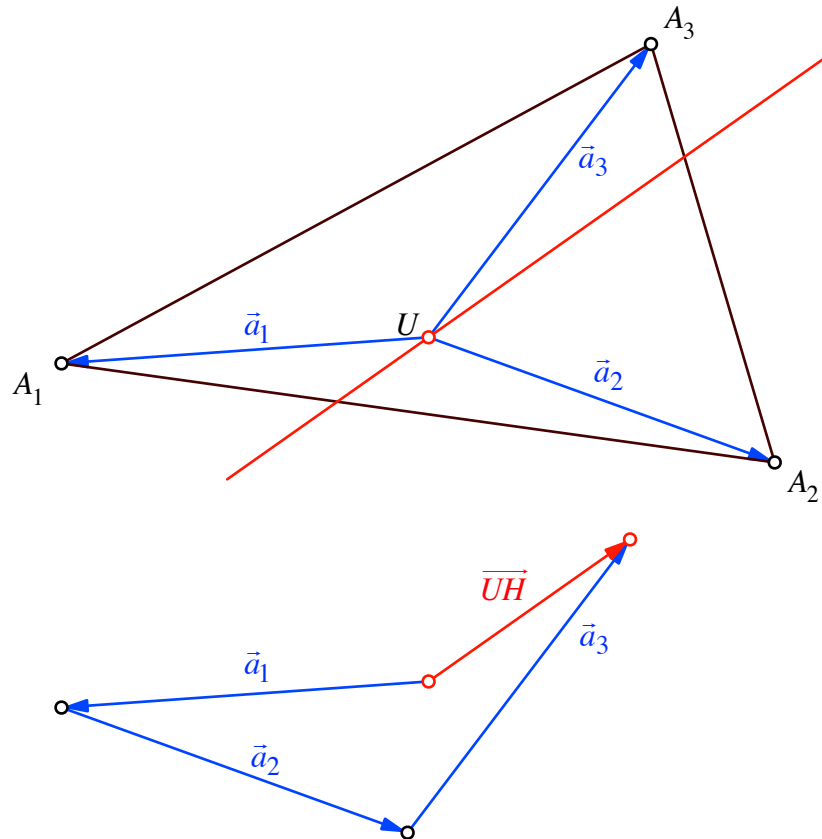


**Abb. 4: Feuerbach-Quader**

Unsere Vektorsumme ist zunächst ein Kantenzug auf dem Quader. Der resultierende Vektor ist der Diagonalen-Vektor  $\overline{UH}$ . Wir haben also durch das Hintertürchen doch den Höhenschnittpunkt gezeichnet, allerdings nicht als Schnittpunkt der drei Höhen.

### 3.3 Variante

Wir arbeiten mit den drei Vektoren  $\vec{a}_i = \overrightarrow{UA_i}$  (Abb. 5). Ihre Summe ist ebenfalls der Vektor  $\overrightarrow{UH}$ .



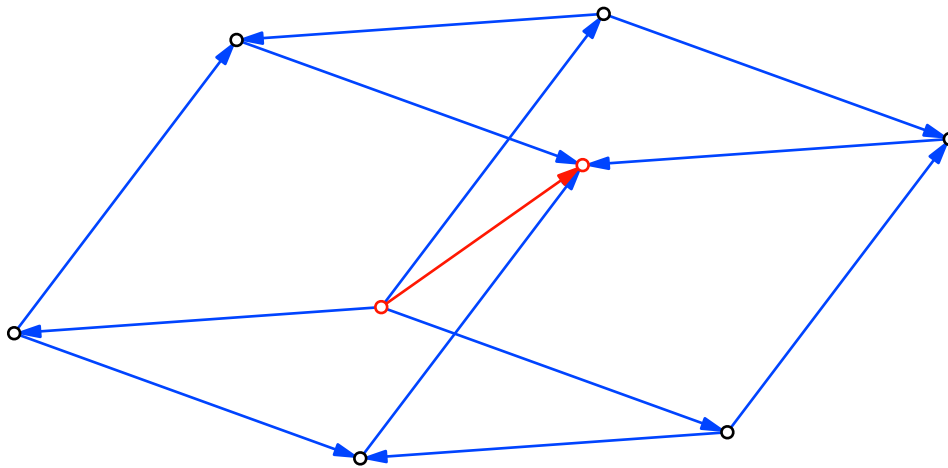
**Abb. 5: Variante**

Beweis: Es ist  $\vec{d}_i = \frac{1}{2}(\vec{a}_{i+1} + \vec{a}_{i+2})$  (Indizes zyklisch modulo 3). Somit ist:

$$\overrightarrow{UH} = \sum_{i=1}^3 \vec{d}_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (\vec{a}_{i+1} + \vec{a}_{i+2}) = \sum_{i=1}^3 \vec{a}_i$$

### 3.4 Kombinatorisches

Es gibt  $3! = 6$  Möglichkeiten, die Summe von drei Vektoren darzustellen (Abb. 5).

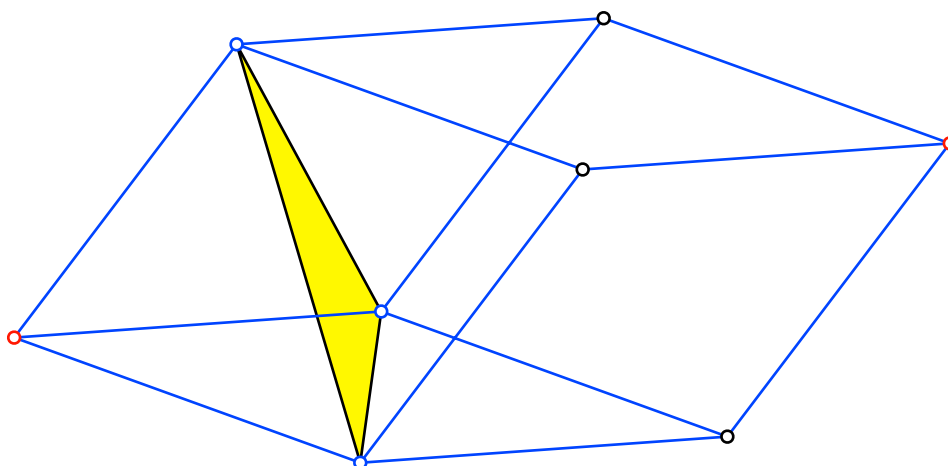


**Abb. 6: Würfel?**

Es entsteht eine gleichseitige Figur aus sechs Rhomben. Wir sind geneigt, diese Figur räumlich zu sehen, sollten sie aber flach sehen.

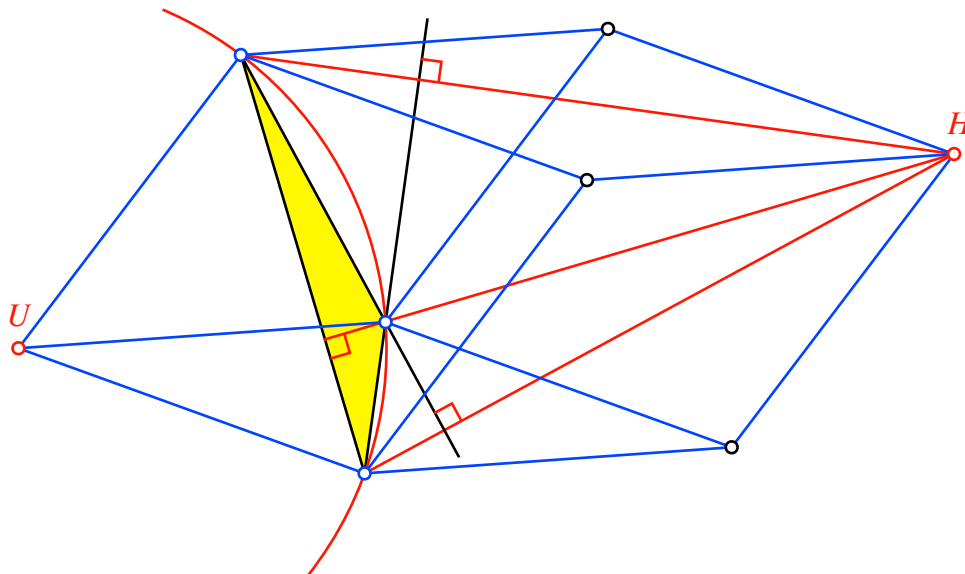
Wir können nun auf 8 Arten drei Punkte auswählen, welche auf das blaue Kantengerüst bezogen je die Hamming-Distanz 2 haben. Hamming-Distanz 2 heißt: Ein Kantenkäfer der sich nur entlang der blauen Kanten bewegen kann, muss genau zwei Kanten von einem Punkt zum anderen zurücklegen.

Das kann man sich so überlegen: Wir wählen einen von den acht Punkten und nehmen die drei anderen Endpunkte der von diesem Punkt ausgehenden Kanten. In der Abbildung 7 sind die drei zum roten Punkt links benachbarten Punkte ausgewählt und zum Dreieck verbunden.



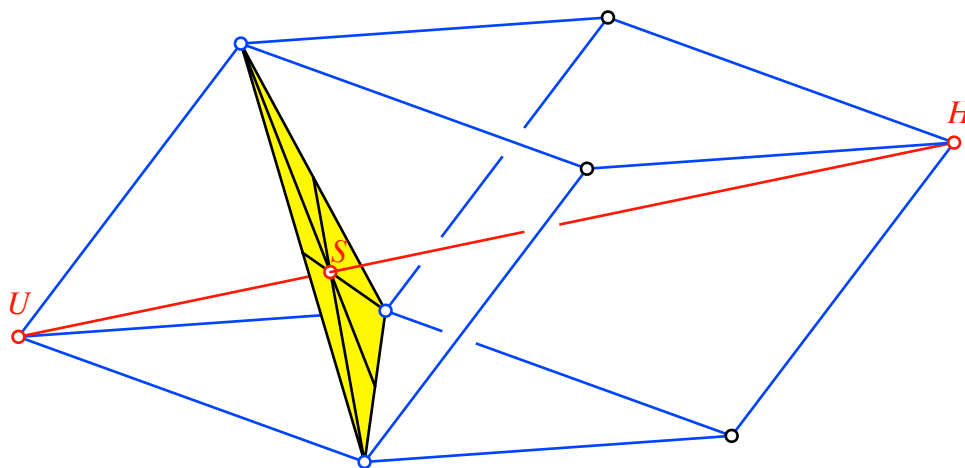
**Abb. 7: Dreieck in der Rhombenfigur**

Der rote Punkt ganz links ist dann der Umkreismittelpunkt des Dreiecks (trivial), der dazu diametrale Punkt der Höhenschnittpunkt (weniger trivial). Die Abbildung 8 zeigt die Situation in extenso.



**Abb. 8: Umkreismittelpunkt und Höhenschnittpunkt**

Wir versuchen nun, die Figur doch räumlich zu sehen (Abb. 9) und schneiden das gelbe Dreieck mit der Raumdiagonalen  $UH$ .

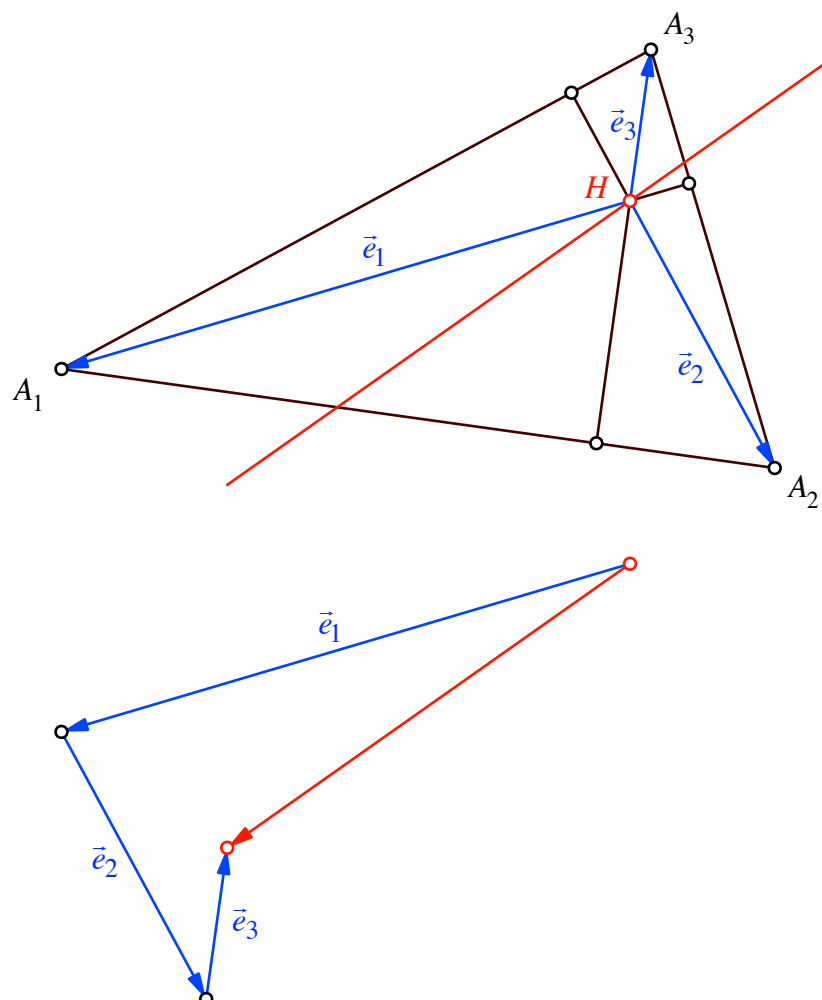


**Abb. 9: Räumliche Sicht**

Der Schnittpunkt ist der Schwerpunkt  $S$  des gelben Dreiecks. Planimetrisch gesehen ist die Gerade  $UH$  die Eulergerade des gelben Dreiecks. Damit sind wir wieder beim Thema.

#### 4 Konstruktion mit dem Höhenschnittpunkt allein

Wir zeichnen den Höhenschnittpunkt  $H$  und dazu die Abstandsvektoren  $\vec{e}_i$  zu den Ecken  $A_i$  (Abb. 10). Die Summe dieser Abstandsvektoren ist ebenfalls ein Richtungsvektor der Eulergeraden.



**Abb. 10: Richtungsvektor der Eulergeraden**

Wegen  $\vec{e}_i = -2\vec{d}_i$  ist dies aber nur eine Variante der Konstruktion mit dem Umkreismittelpunkt.

#### Literatur

Walser, Hans (2007): Die Eulersche Gerade. Beweis ohne Worte. UNI NOVA Wissenschaftsmagazin der Universität Basel. 105 – März 2007. 20.

Walser, Hans (2011): Geometrische Miniaturen. Figuren – Muster – Symmetrien. Leipzig. EAGLE, Edition am Gutenbergplatz. ISBN 978-3-937219-42-4.