Hans Walser, [20140417a]

Eulergerade

1 Worum geht es

Es wird eine Methode vorgestellt, wie die Eulergerade durch den Umkreismittelpunkt allein oder auch durch den Höhenschnittpunkt allein gezeichnet werden kann.

2 Die Eulergerade

In einem Dreieck $A_1A_2A_3$ mit dem Umkreismittelpunkt U, dem Höhenschnittpunkt H und dem Schwerpunkt S liegen die drei Punkte auf einer Geraden, der Eulergeraden (Abb. 1, Walser, 2011, S. 11,12).

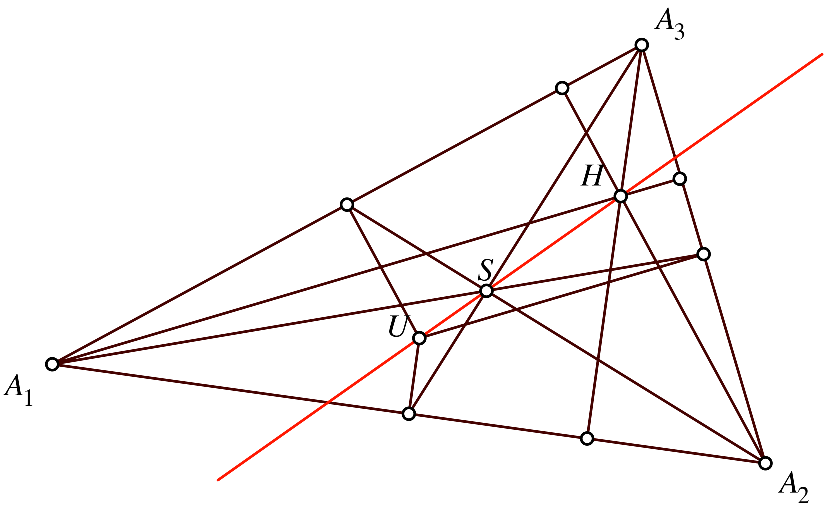

Abb. 1: Eulergerade

Die Abbildung 2 zeigt einen Beweis ohne Worte (Walser, 2007).

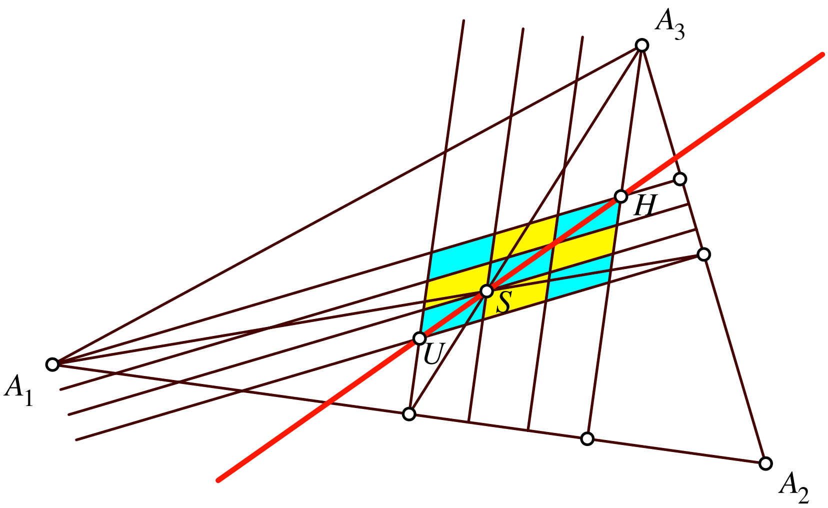

Abb. 2: Beweis ohne Worte

Für die Konstruktion der Eulergeraden genügt die Konstruktion von zweien der drei Punkte U, H, S.

3 Konstruktion mit dem Umkreismittelpunkt allein

3.1 Der Richtungsvektor

Wir konstruieren den Umkreismittelpunkt U. Damit ergeben sich die Abstandsvektoren $\vec{d}_i$ zu den Seiten $a_i = A_{i+1}A_{i+2}$ (Abb. 3). Die Summe dieser drei Abstandsvektoren ist ein Richtungsvektor der Eulergeraden.

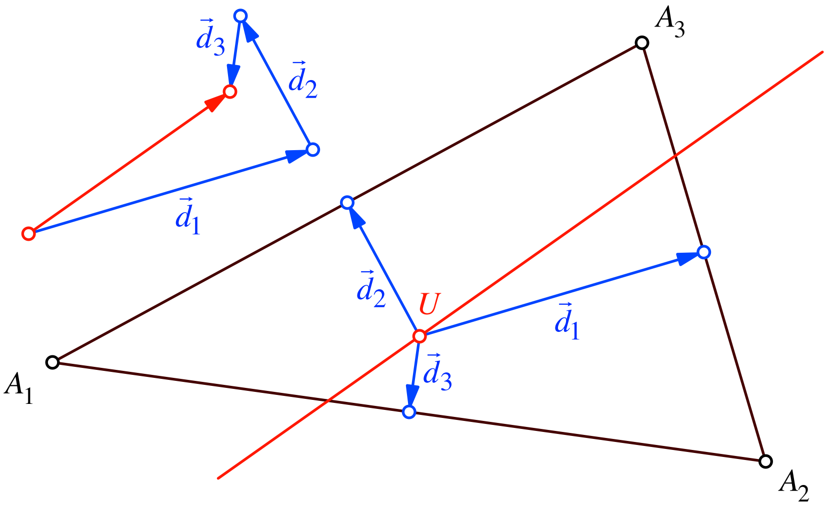

Abb. 3: Richtungsvektor der Eulergeraden

3.2 Beweis

Wir zeichnen den Feuerbach-Quader ein (Abb. 4).

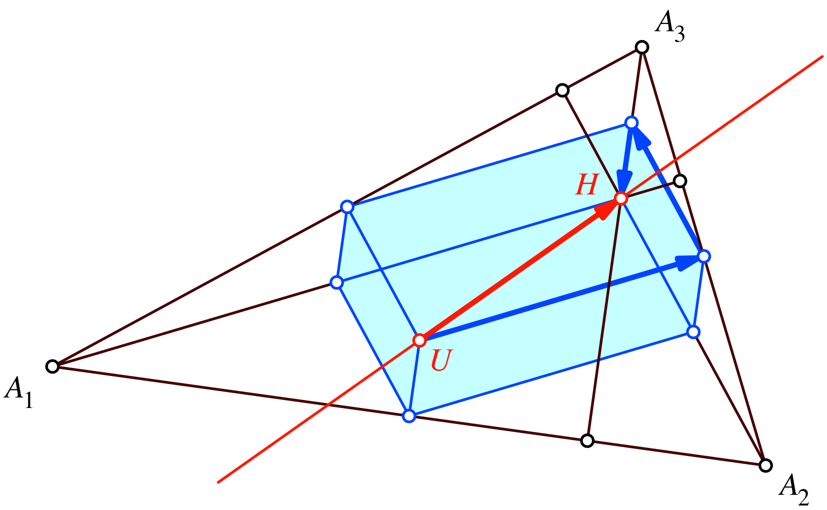

Abb. 4: Feuerbach-Quader

Unsere Vektorsumme ist zunächst ein Kantenzug auf dem Quader. Der resultierende Vektor ist der Diagonalen-Vektor $\overrightarrow{UH}$. Wir haben also durch das Hintertürchen doch den Höhenschnittpunkt gezeichnet, allerdings nicht als Schnittpunkt der drei Höhen.

3.3 Variante

Wir arbeiten mit den drei Vektoren $\vec{a}_i = \overrightarrow{UA_i}$ (Abb. 5). Ihre Summe ist ebenfalls der Vektor $\overrightarrow{UH}$.

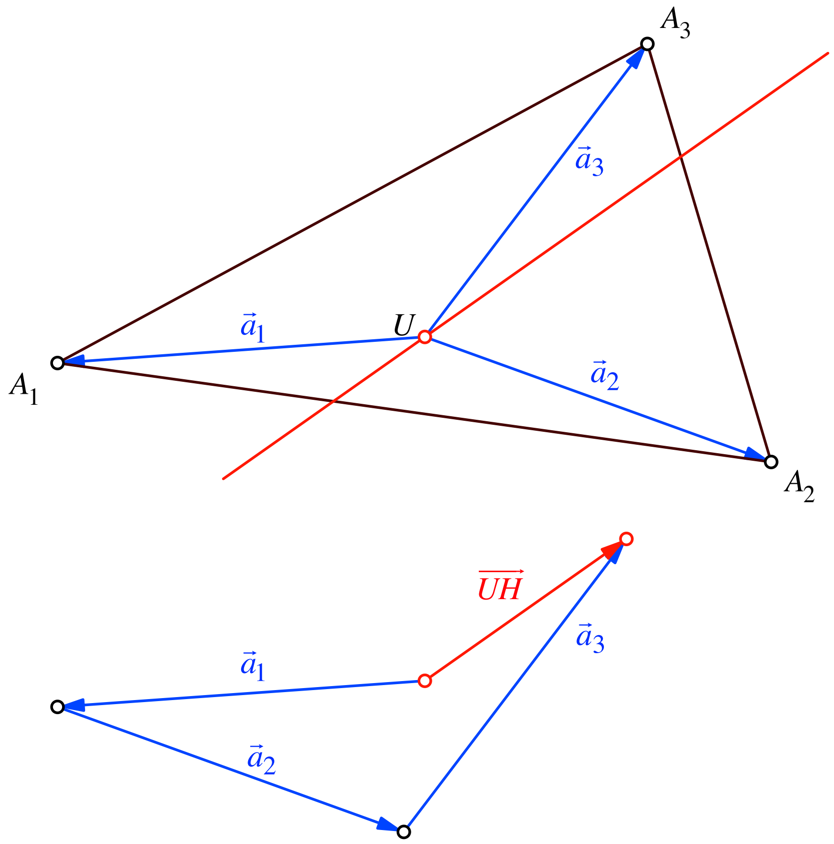

Abb. 5: Variante

Beweis: Es ist $\vec{d}_i = \frac{1}{2}\left(\vec{a}_{i+1} + \vec{a}_{i+2}\right)$ (Indizes zyklisch modulo 3). Somit ist:

$$\overrightarrow{UH} = \sum_{i=1}^{3} \vec{d}_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\left(\vec{a}_{i+1} + \vec{a}_{i+2}\right) = \sum_{i=1}^{3} \vec{a}_i$$

3.4 Kombinatorisches

Es gibt 3! = 6 Möglichkeiten, die Summe von drei Vektoren darzustellen (Abb. 5).

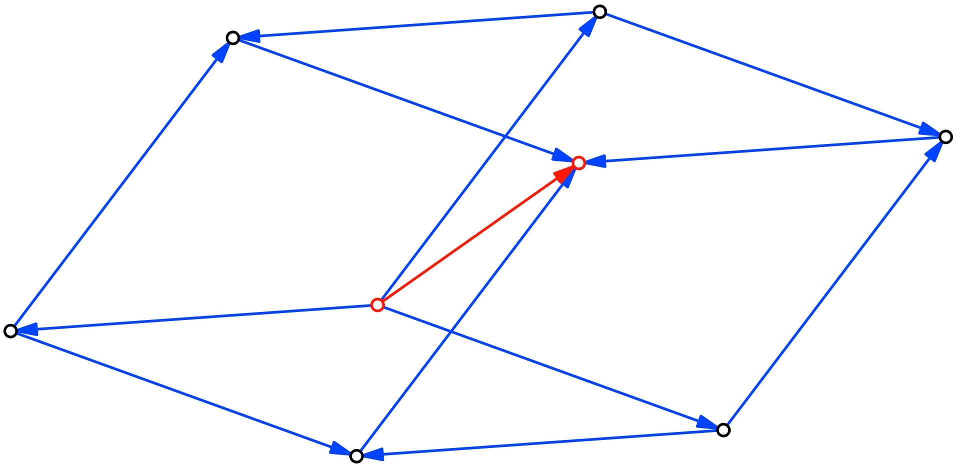

Abb. 6: Würfel?

Es entsteht eine gleichseitige Figur aus sechs Rhomben. Wir sind geneigt, diese Figur räumlich zu sehen, sollten sie aber flach sehen.

Wir können nun auf 8 Arten drei Punkte auswählen, welche auf das blaue Kantengerüst bezogen je die Hamming-Distanz 2 haben. Hamming-Distanz 2 heißt: Ein Kantenkäfer der sich nur entlang der blauen Kanten bewegen kann, muss genau zwei Kanten von einem Punkt zum anderen zurücklegen.

Das kann man sich so überlegen: Wir wählen einen von den acht Punkten und nehmen die drei anderen Endpunkte der von diesem Punkt ausgehenden Kanten. In der Abbildung 7 sind die drei zum roten Punkt links benachbarten Punkte ausgewählt und zum Dreieck verbunden.

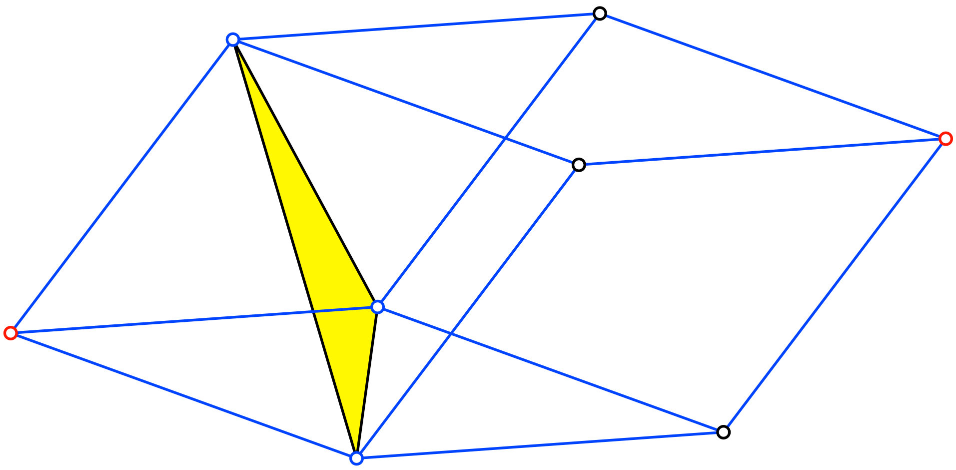

Abb. 7: Dreieck in der Rhombenfigur

Der rote Punkt ganz links ist dann der Umkreismittelpunkt des Dreiecks (trivial), der dazu diametrale Punkt der Höhenschnittpunkt (weniger trivial). Die Abbildung 8 zeigt die Situation in extenso.

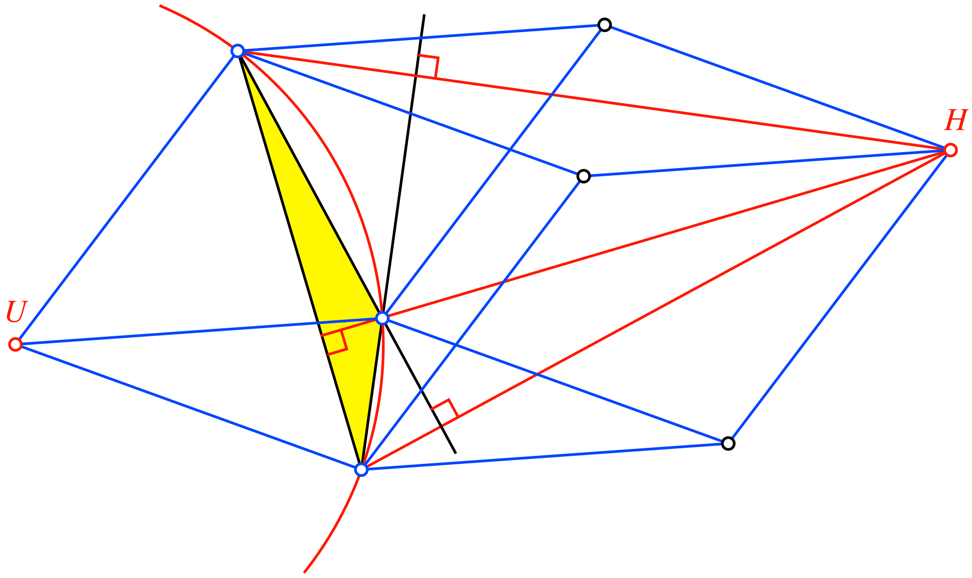

Abb. 8: Umkreismittelpunkt und Höhenschnittpunkt

Wir versuchen nun, die Figur doch räumlich zu sehen (Abb. 9) und schneiden das gelbe Dreieck mit der Raumdiagonalen UH.

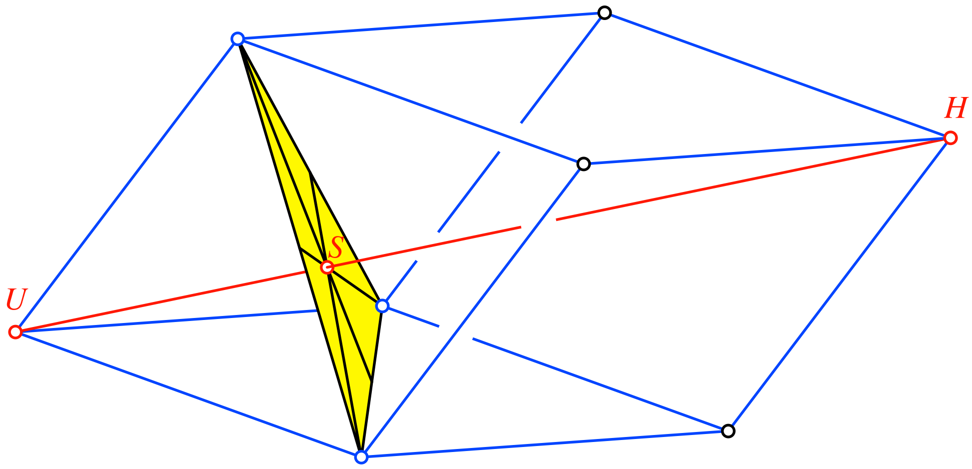

Abb. 9: Räumliche Sicht

Der Schnittpunkt ist der Schwerpunkt S des gelben Dreiecks. Planimetrisch gesehen ist die Gerade UH die Eulergerade des gelben Dreiecks. Damit sind wir wieder beim Thema.

4 Konstruktion mit dem Höhenschnittpunkt allein

Wir zeichnen den Höhenschnittpunkt H und dazu die Abstandsvektoren $\vec{e}_i$ zu den Ecken A_i (Abb. 10). Die Summe dieser Abstandsvektoren ist ebenfalls ein Richtungsvektor der Eulergeraden.

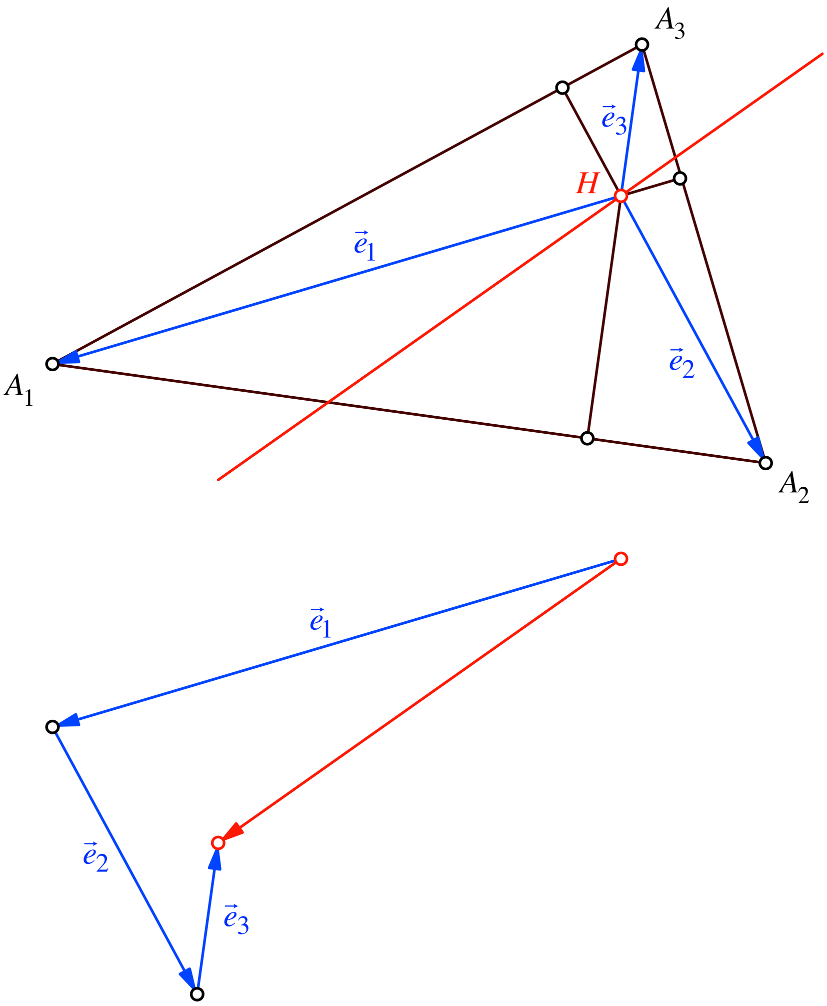

Abb. 10: Richtungsvektor der Eulergeraden

Wegen $\vec{e}_i = -2\vec{d}_i$ ist dies aber nur eine Variante der Konstruktion mit dem Umkreismittelpunkt.

Literatur

Walser, Hans (2007): Die Eulersche Gerade. Beweis ohne Worte. UNI NOVA Wissenschaftsmagazin der Universität Basel. 105 – März 2007. 20.

Walser, Hans (2011): Geometrische Miniaturen. Figuren – Muster – Symmetrien. Leipzig. EAGLE, Edition am Gutenbergplatz. ISBN 978-3-937219-42-4.