Hans Walser, [20151219]

# Eulerformel

Anregung: S. N., B.

## 1 Worum geht es?

Eine Spielerei um die Eulersche Polyederformel.

Im Unterricht kann die Eulersche Polyederformel etwa an Schachteln (Pralinenschachteln) illustriert werden. Es ist mit $e$ = # Ecken, $k$ = # Kanten und $f$ = # Seitenflächen:

$$e-k+f=2 \tag{1}$$

Bei gekrümmten Flächen und Kanten ergibt die Formel (1) unterschiedliche Resultate. Wir haben dabei allerdings keine Polyeder mehr.

## 2 Beispiele

### 2.1 Stimmige Beispiele

#### 2.1.1 Tropfen

Abb. 1: Tropfen

Es ist:

$$e-k+f=1-0+1=2 \tag{2}$$

### 2.1.2 Kegel

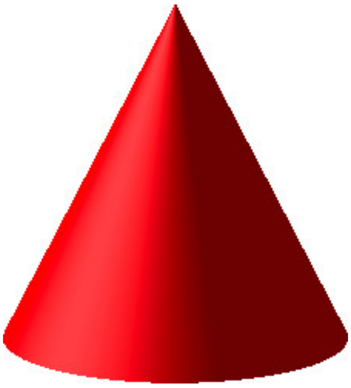

**Abb. 2: Kegel mit Boden**

Es ist:

$$e-k+f=1-1+2=2 \tag{3}$$

Kommentar: Die Kante ist *nicht* einfach zusammenhängend. Die Mantelfläche des Kegels ist *nicht* einfach zusammenhängend. Wir setzen dafür je einen „Strafpunkt" und rechnen algebraisch:

$$e-k+f=1-(1-1)+\{(1-1)+1\}=2 \tag{4}$$

### 2.1.3 Rundturm mit Kegeldach

**Abb. 3: Rundturm mit Kegeldach und Boden**

Es ist:

$$e-k+f=1-2+3=2 \tag{5}$$

Kommentar: Die beiden Kanten und die Mantelflächen von Zylinder und Kegel sind nicht einfach zusammenhängend. Wir setzen je einen Strafpunkt:

$$e-k+f=1-2(1-1)+\{2(1-1)+1\}=2 \tag{6}$$

## 2.2 Unstimmige Beispiele

### 2.2.1 Zylinder

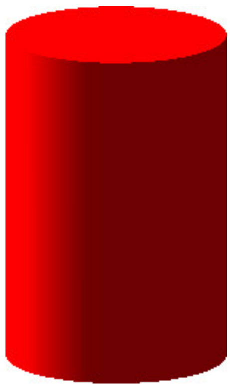

Abb. 4: Zylinder mit Deckel und Boden

Es ist:

$$e-k+f=0-2+3=1\neq 2 \tag{7}$$

Kommentar: Die beiden Kanten und die Mantelfläche sind nicht einfach zusammenhängend. Mit Strafpunkten erhalten wir:

$$e-k+f=0-2(1-1)+\{2+(1-1)\}=2 \tag{8}$$

Die Eulerformel ist „gerettet“.

### 2.2.2 Doppelkegel

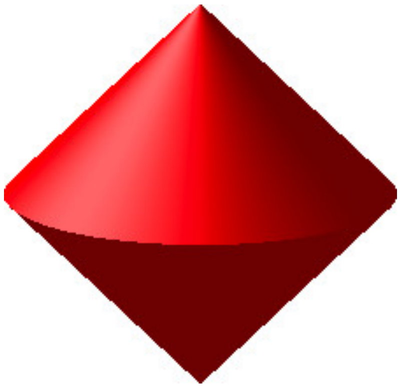

**Abb. 5: Doppelkegel**

Es ist:

$$e-k+f=2-1+2=3\neq 2 \tag{9}$$

Die Kante und die beiden Flächen sind nicht einfach zusammenhängend. Mit Strafpunkten ergibt sich:

$$e-k+f=2-(1-1)+2(1-1)=2 \tag{10}$$

Und wieder ist die Eulerformel gerettet.

### 2.2.3 Rollkörper

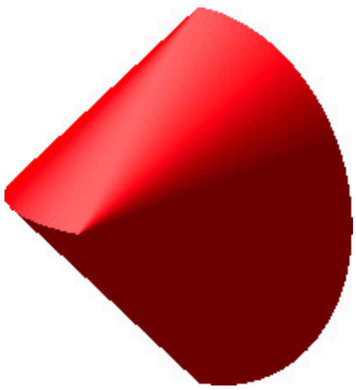

**Abb. 6: Rollkörper**

Der Rollkörper entsteht aus der Doppelpyramide (Abb. 5), indem diese mit einem Achsenschnitt halbiert wird (der Achsenschnitt ist ein Quadrat) und eine Hälfte um 90° gedreht. In der Abbildung 7 ist der gedrehte Teil blau markiert. Der Farbwechsel rot-blau ist aber keine Kante, die Fläche geht dort glatt durch.

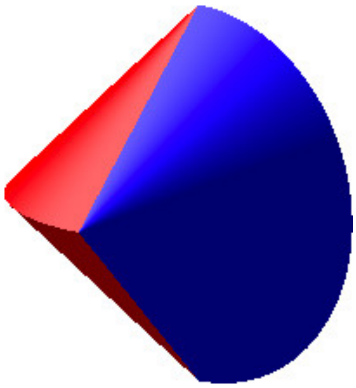

**Abb. 7: Entstehung des Rollkörpers**

Der Rollkörper hat nur ein Oberflächenstück und kann darauf abrollen. Wir erhalten:

$$e-k+f=4-2+1=3\neq 2 \tag{11}$$

Die Fläche ist nicht einfach zusammenhängend und erhält daher einen Strafpunkt:

$$e-k+f=4-2+(1-1)=2 \tag{12}$$

### 2.2.4 Halbkugel

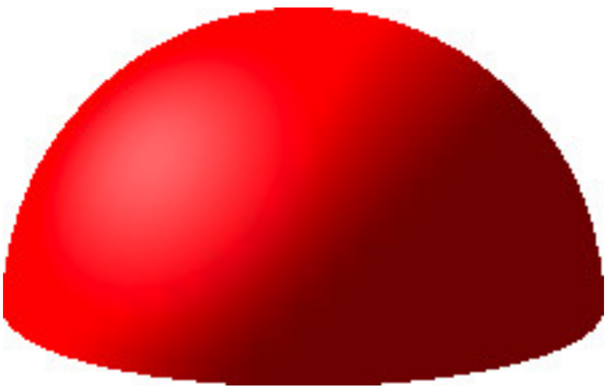

**Abb. 8: Halbkugel mit Boden**

Es ist:

$$e-k+f=0-1+2=1\neq 2 \tag{13}$$

Die Kante ist nicht einfach zusammenhängend und erhält einen Strafpunkt:

$$e-k+f=0-(1-1)+2=2 \tag{14}$$

#### 2.2.5 Die Kugel

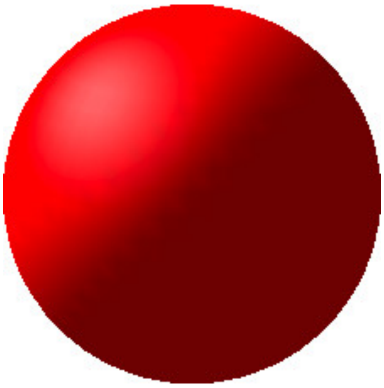

**Abb. 9: Kugel**

Es ist:

$$e-k+f=0-0+1=1\neq 2 \tag{15}$$

Auweia, was machen wir da?
Wir geben der Kugeloberfläche einen Bonuspunkt:

$$e-k+f=0-0+(1+1)=2 \tag{16}$$

Der Bonuspunkt muss natürlich begründet werden.

## 3 Straf- und Bonuspunkte

Wir versuchen, die Straf- und Bonuspunkte in ein System zu bringen. Dazu ersetzen wir die Terminologie durch *Charakteristik* und verfahren wir wie folgt.

### 3.1 Charakteristik

Jedem Bauteil ordnen wir eine individuelle Charakteristik zu.

#### 3.1.1 Ecken

Ecken haben die Charakteristik 1. (Man kann sich überlegen, wie man mit Doppelecken, Dreifachecken, ... verfahren soll.)

#### 3.1.2 Kanten

Offene Kanten haben die Charakteristik 1, geschlossene Kanten die Charakteristik 0.

#### 3.1.3 Flächen

Bei Flächen zählen wir die Anzahl der Ränder und subtrahieren von 2.

Eine Fläche ohne Rand (Kugel) hat die Charakteristik 2.

Eine Fläche mit einem Rand hat die Charakteristik 1.

Eine Fläche mit zwei Rändern (Kreisring, allgemein eine Fläche mit einem Loch) hat die Charakteristik 0.

Eine Fläche mit $k$ Löchern hat die Charakteristik $1-k$ .

Vorsicht: Funktioniert nur bei Flächen *ohne* Brücken. Bei Flächen mit $b$ Brücken (der Torus hat eine Brücke) muss die Charakteristik um $2b$ reduziert werden.

### 3.2 Eulerformel

Nun addieren wir die Charakteristiken. Charakteristiken von Ecken positiv, Charakteristiken von Kanten negativ und Charakteristiken von Flächen wieder positiv.

### 3.3 Beispiel

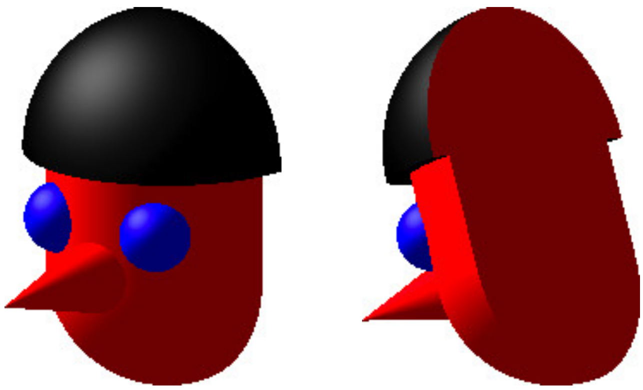

**Abb. 10: Fratze**

Wir haben fünf Ecken: Nasenspitze, Ecken bei Haaransatz.

Kanten:

Augenringe und Nasenansatz sind geschlossen, daher Charakteristik 0.

Die übrigen 6 Kanten sind offen, Charakteristik je 1.

Flächen:

Die Augenflächen, die Haarfläche, die Unterhaarfläche und die Rückfläche haben je einen Rand, also die Charakteristik 1.

Die Nasenfläche hat zwei Ränder (Nasenansatz und Spitze), daher die Charakteristik 0.

Die Gesichtsfläche hat vier Ränder (Umriss, Augenringe, Nasenansatz) und daher die Charakteristik $-2$.

Somit erhalten wir für die Eulerformel:

$$\{5\} - \{6+0\} + \{5+0-2\} = 2 \tag{17}$$