Hans Walser, [20181212]

Ellipseneigenschaft

Eine Aufgabe von Thomas Jahre, Chemnitz

1 Problemstellung

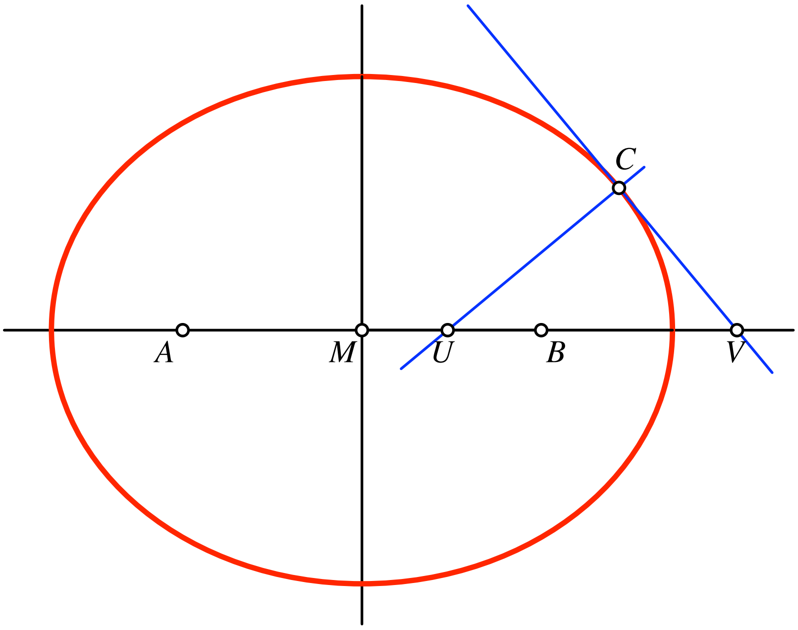

Abb. 1: Problemstellung

Eine Ellipse hat den Mittelpunkt M und die beiden Brennpunkte A und B (Abb. 1). Die Ellipsennormale und die Ellipsentangente in einem Ellipsenpunkt C schneiden die Gerade AB und U beziehungsweise V. Zu zeigen ist:

$$\overline{MU} \cdot \overline{MV} = \overline{AM}^2 \qquad (1)$$

Die Abbildung 2 illustriert den Sachverhalt. Zusätzlich sind die Strecken AC und BC eingezeichnet. Die Ellipsennormale und die Ellipsentangente sind die innere beziehungsweise äußere Winkelhalbierende des Winkels ACB. Dies ist der Schlüssel für den Beweis von (1). Es wird sich zeigen, dass es sich um eine reine Dreiecksaufgabe handelt. Die Geschichte mit der Ellipse dient nur zur Verschleierung.

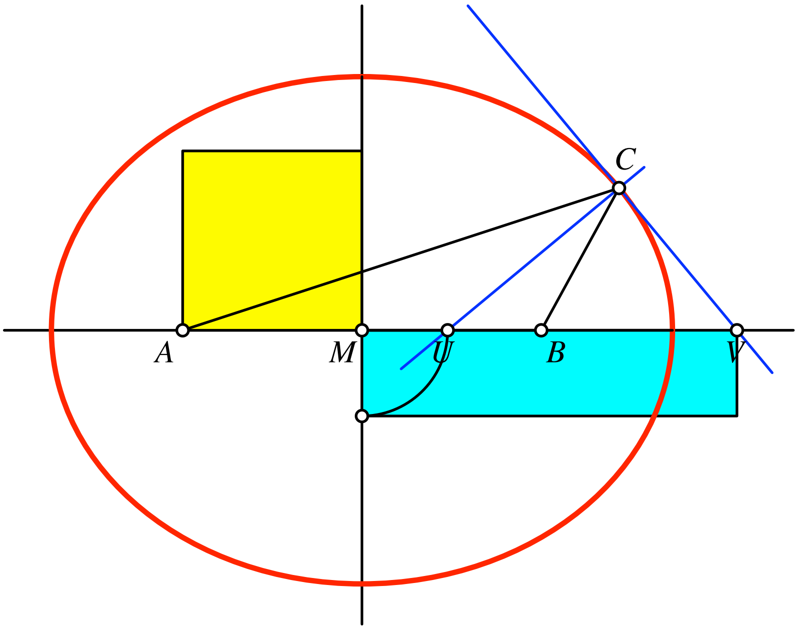

Abb. 2: Illustration

2 Randbemerkungen

Die Beziehung (1) beschreibt die Inversion am Thaleskreis über AB (Abb. 3).

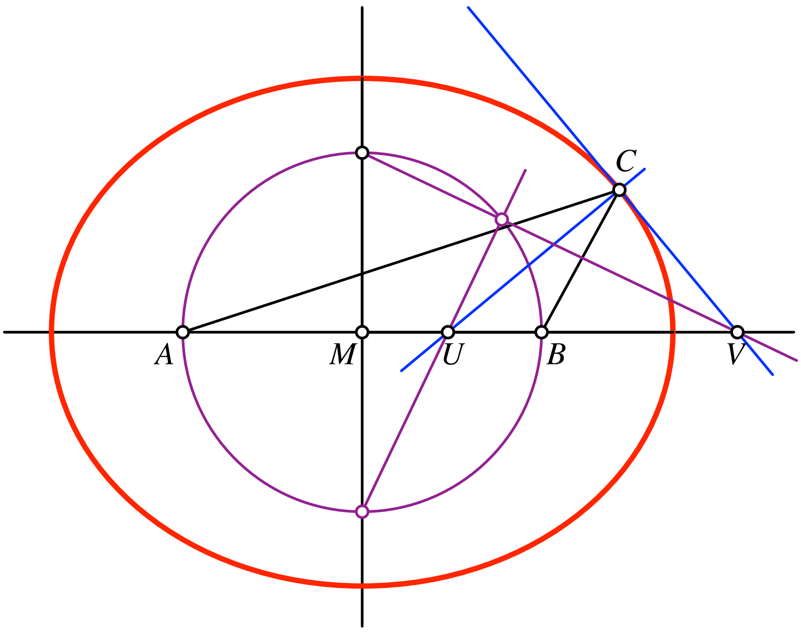

Abb. 3: Inversion am Kreis

Das Dreieck UVC ist rechtwinklig bei C. In der Abbildung 4 ist der zugehörige Thaleskreis eingetragen.

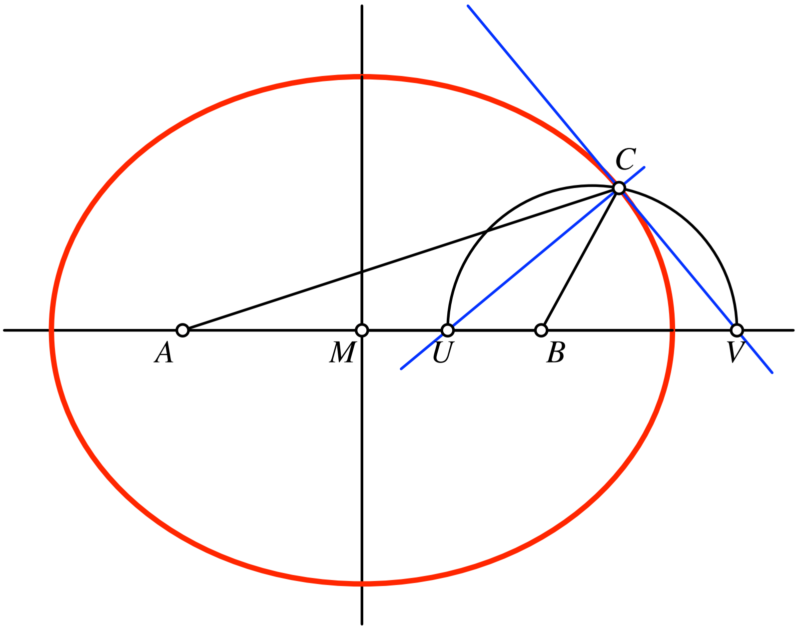

Abb. 4: Thaleskreis

Die Abbildung 2 erinnert an den Höhensatz. In der Abbildung 5 ist das zugehörige rechtwinklige Dreieck mitsamt Thaleskreis eingetragen.

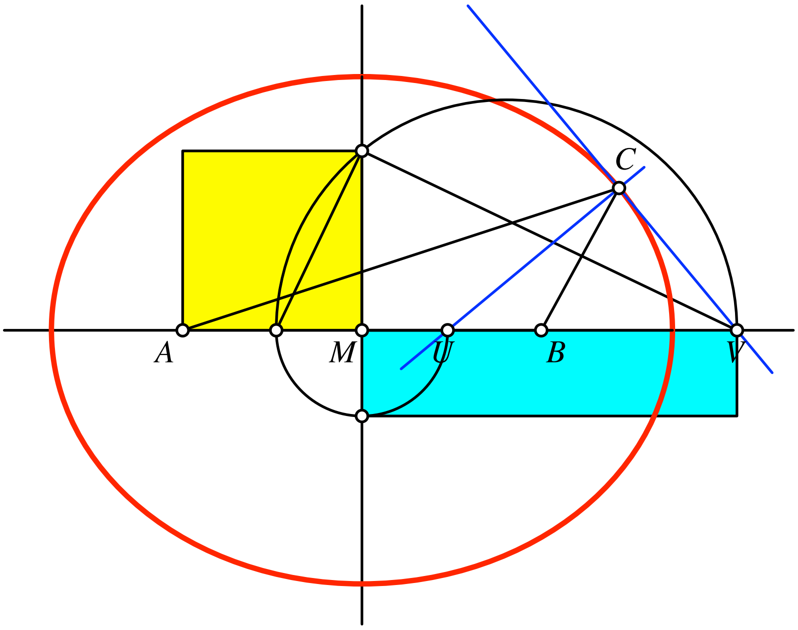

Abb. 5: Höhensatz

Die Abbildung 6 zeigt eine Überlagerung der Abbildungen 3 bis 5.

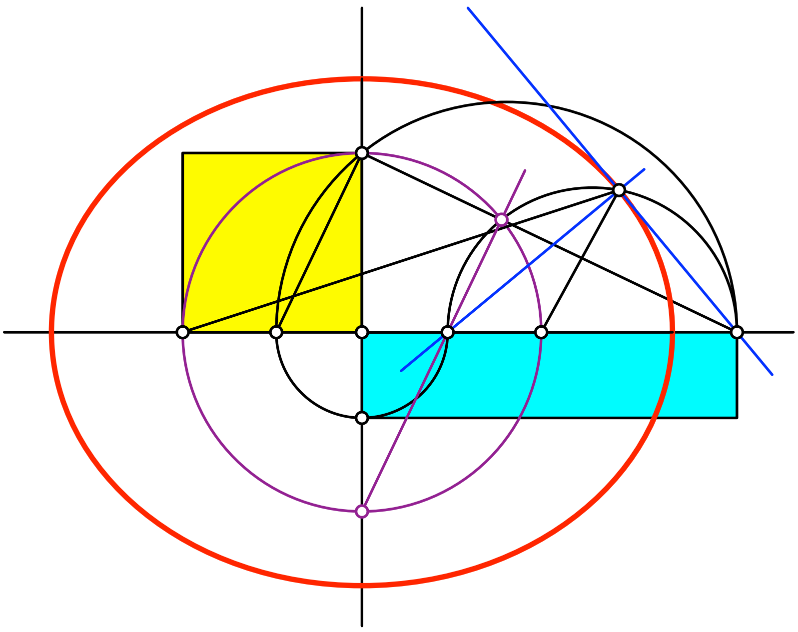

Abb. 6: Überlagerung

3 Beweis

Das Problem ist äquivalent zu folgendem: In einem Dreieck ABC schneiden die innere und die äußere Winkelhalbierende bei C die Gerade AB in U beziehungsweise V. Weiter sei M der Mittelpunkt der Strecke $c = AB$ (Abb. 7).

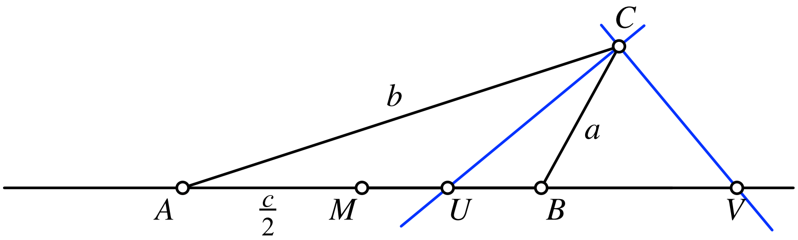

Abb. 7: Winkelhalbierende im Dreieck

Zu zeigen ist:

$$\overline{MU} \cdot \overline{MV} = \left(\tfrac{c}{2}\right)^2 \tag{2}$$

Aus dem Satz, dass die Winkelhalbierenden die Gegenseite im Verhältnis der anliegenden Seiten teilen, ergibt sich:

$$\overline{AU} = \tfrac{b}{b+a}c, \quad \overline{AV} = \tfrac{b}{b-a}c \tag{3}$$

Der Rest ist Rechnung:

$$\overline{MU} = \overline{AU} - \tfrac{c}{2} = c\left(\tfrac{b}{b+a} - \tfrac{1}{2}\right), \quad \overline{MV} = \overline{AV} - \tfrac{c}{2} = c\left(\tfrac{b}{b-a} - \tfrac{1}{2}\right) \tag{4}$$

Und damit:

$$\begin{aligned}\overline{MU} \cdot \overline{MV} &= c^2\left(\tfrac{b}{b+a} - \tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{b}{b-a} - \tfrac{1}{2}\right)\\ &= c^2\left(\frac{b^2 - \frac{1}{2}b(b-a) - \frac{1}{2}b(b+a)}{(b+a)(b-a)} + \frac{1}{4}\right) = \tfrac{c^2}{4} = \left(\tfrac{c}{2}\right)^2\end{aligned} \tag{5}$$

Damit sind (2) und (1) bewiesen.
Die Abbildung 8 illustriert nochmals den Sachverhalt.

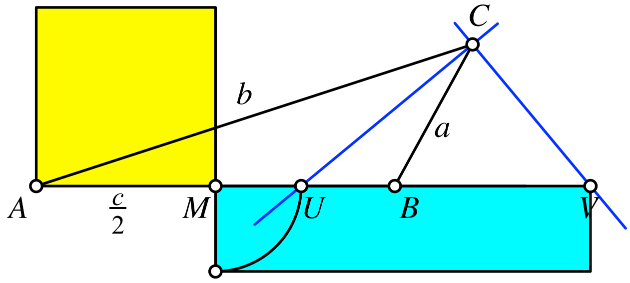

Abb. 8: Sachverhalt