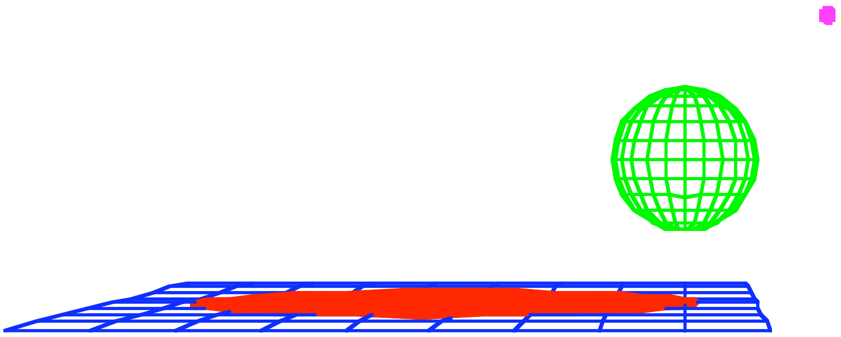
Ellipse als Enveloppe von Kreisen

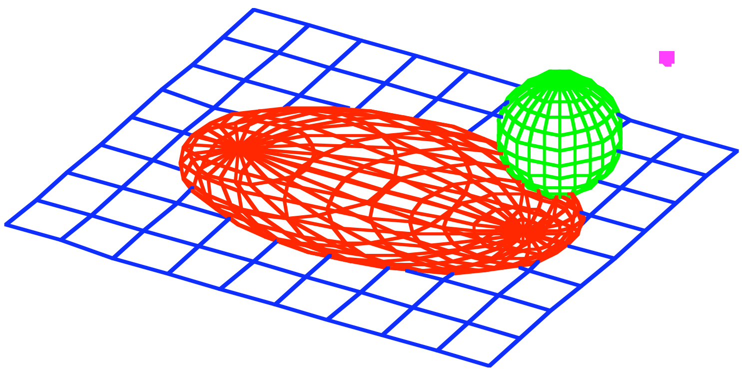
Inhalt

1 Zentralprojektion

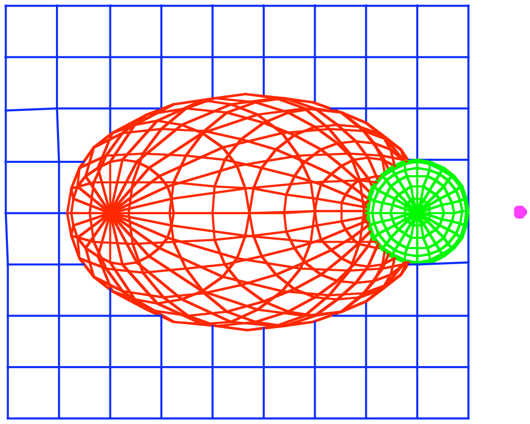
Wir projizieren eine Kugel mit Zentralprojektion auf eine äquatorparallele Ebene.



Zentralprojektion der Kugel



Schrägbild



Sicht von oben

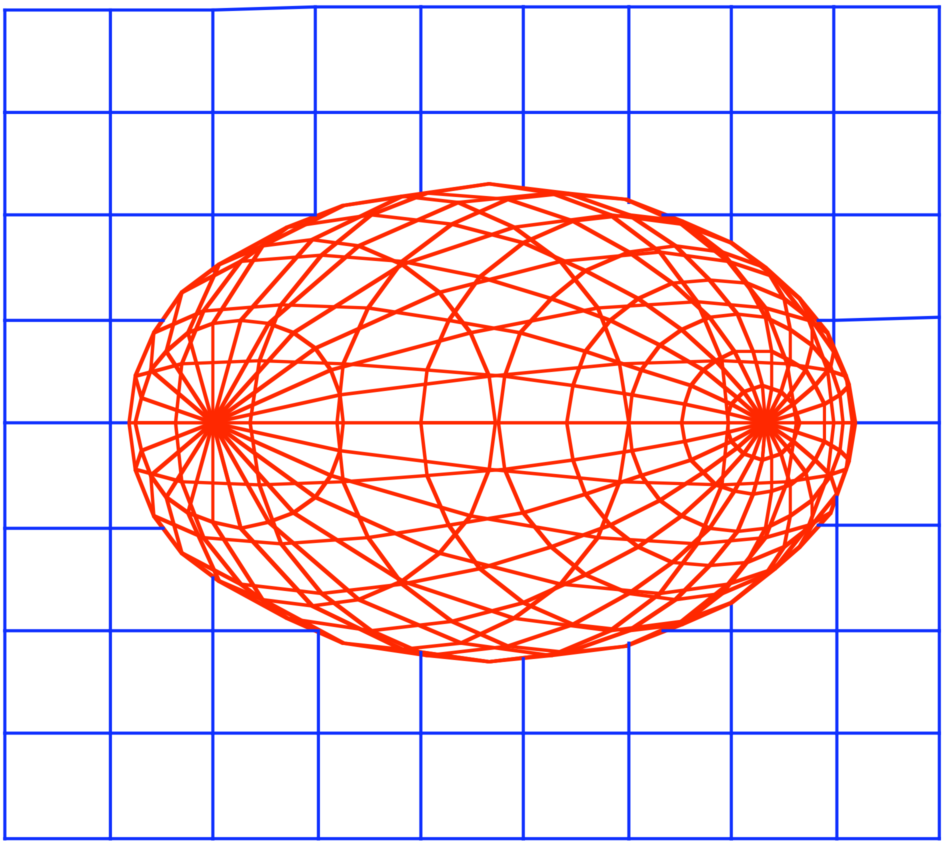


Bild der Kugel

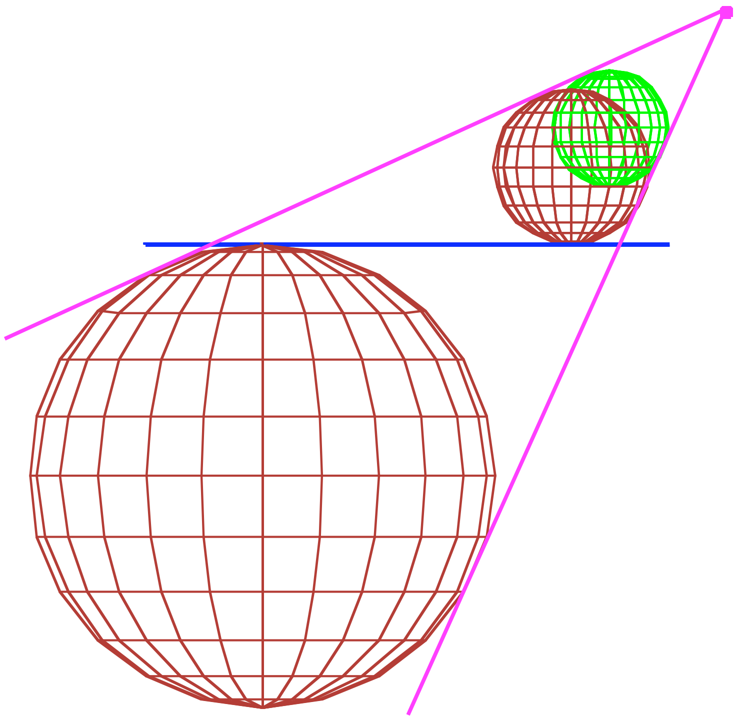
Der Umriss des Kugelbildes ist eine Ellipse (Ellipse als Kegelschnitt).

Die Bilder der Breitenkreise sind wiederum Kreise; die Bilder der Meridiane sind Ellipsen. Die Umrissellipse kann als Enveloppe einerseits der Bilder der Breitenkreise und andererseits der Bilder der Meridiane gesehen werden.

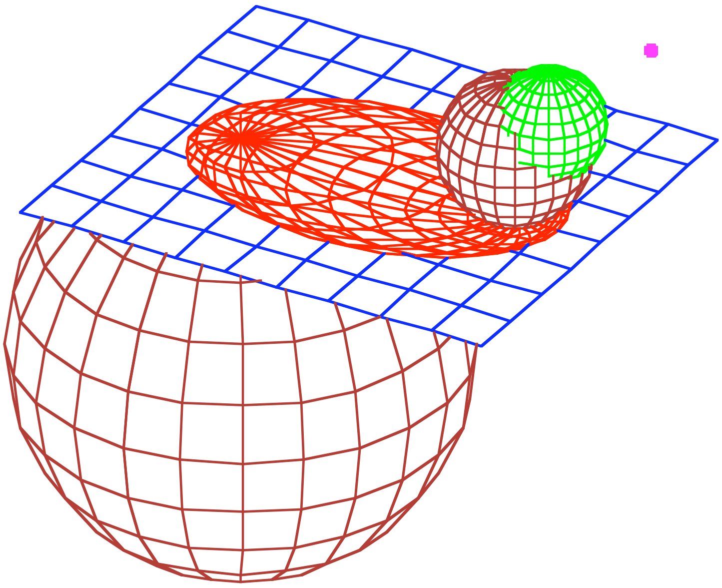
Die Bilder von Nordpol und Südpol sind die Brennpunkte der Umirssellipse; wir können dies mit Hilfe der Kugeln von Dandelin beweisen.

2 Die Kugeln von Dandelin

Wenn wir die Kugel vom Projektionszentrum aus strecken, ändert sich nichts am Kugelbild. Wir können nun zum Beispiel so strecken, dass der Nordpol oder der Südpol die Projektikonsebene berührt. Diese beiden Kugeln sind die beiden Kugeln von Dandelin im Projektionskegel und berühren daher die Ellipseneben je in einem Brennpunkt.



Geeignete Streckung der Urbildkugeln ergibt die Dandelinkugeln

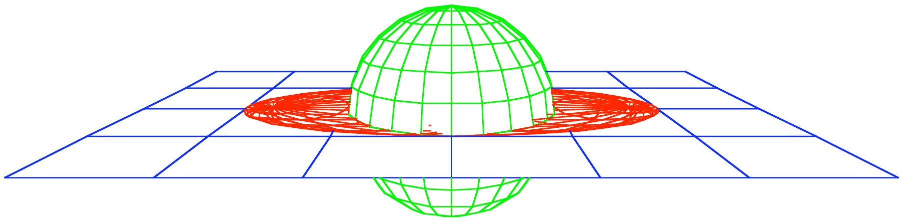


Alle drei Kugeln haben dasselbe Bild

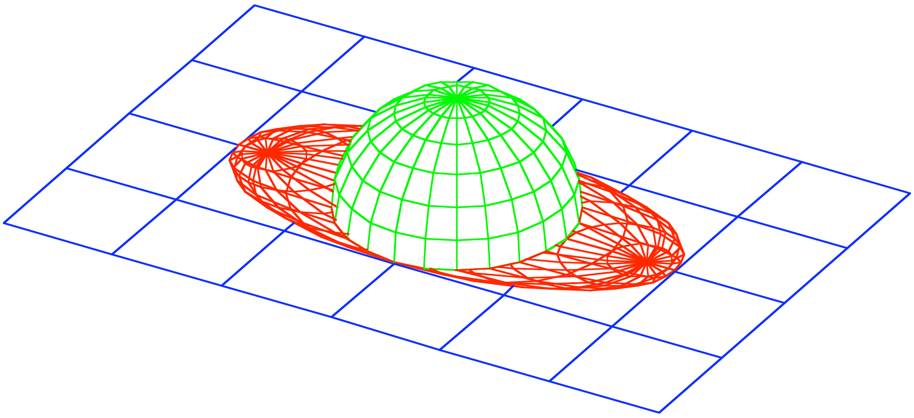
3 Sonderfall

3.1 Disposition

Wir denken uns das Projektionszentrum ins Unendliche verschoben, statt einer Zentralprojektion ergibt sich nun eine Parallelprojektion, welche zeichnerisch und rechnerisch einfacher zu handhaben ist. Ferner projizieren wird direkt auf die Äquatorebene.



Spezielle Disposition



Schrägbild

Im Kugelbild erscheint die Umrisslinie wieder als Ellipse, die Bilder der Breitenkreise sind Kreise und die Bilder der Meridiane sind Ellipsen.

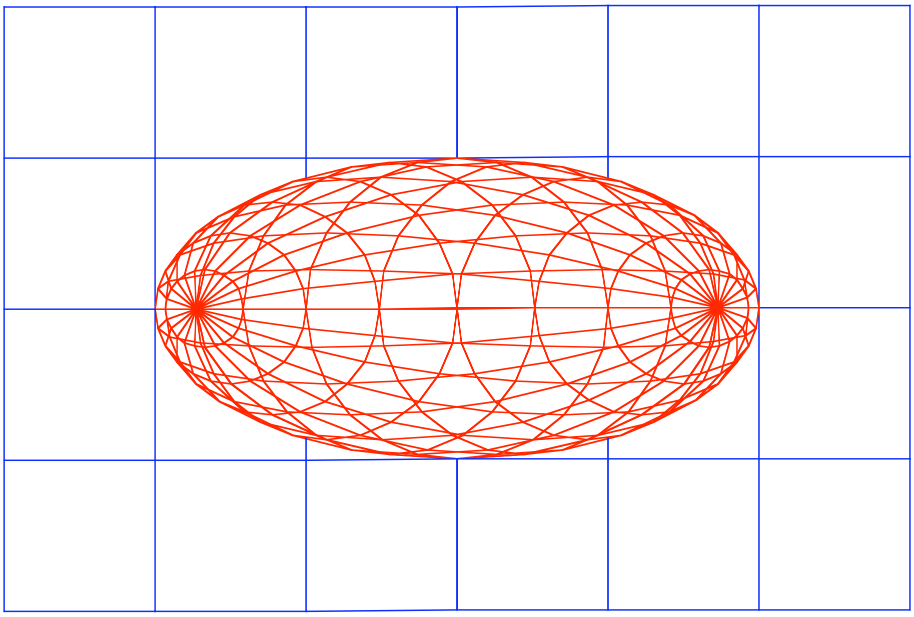


Bild der Kugel

Die Bilder der Meridiane, die Ellipsen also, berühren alle die Umrissellipse je in zwei diametralen Linien.

Die Bilder der Breitenkreise, welche selber Kreise sind, berühren aber nicht alle die Umrissellipse. Einige berühren die Umrissellipse in zwei Punkten, welche spiegelbildlich zur langen Ellipsenachse liegen. Dann gibt es zwei Kreise, welche die Umrissellipse genau einmal berühren, nämlich in den so genannten „spitzen“ Scheiteln der Ellipse, den Endpunkten der langen Ellipsenachse. Schließlich gibt es Kreise, welche im Innern der Ellipse liegen und den Umriss nicht berühren. Dies sind die Bilder von Breitenkreisen, welche „in der Nähe“ der Pole liegen.

3.2 Bezeichnungen

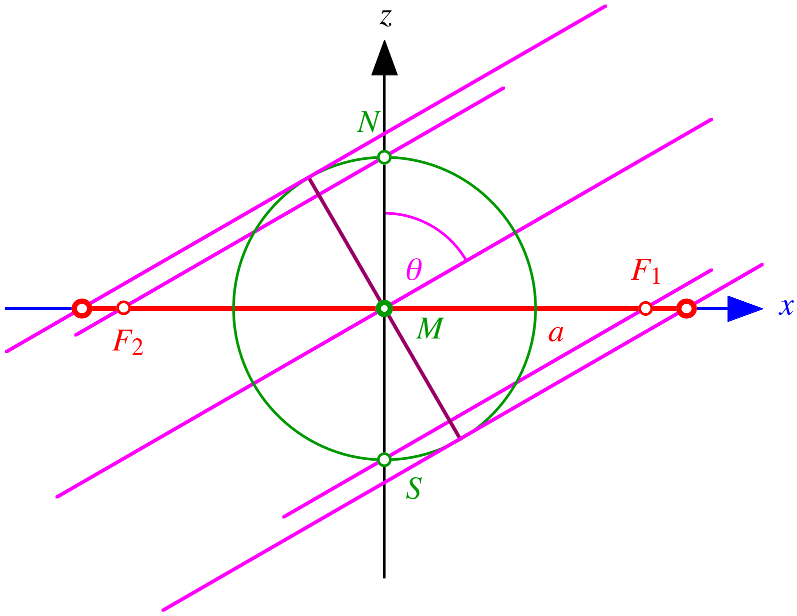
Für die weitere Bearbeitung sind einige Bezeichnungen praktisch. Zunächst bezeichnen wir den Kugelradius mit r und wie üblich die lange und die kurze Halbachse der Ellipse mit a beziehungsweise b. Dann gilt zunächst:

$$b = r$$

Die Länge der langen Halbachse a hängt natürlich vom Einfallswinkel der Projektionsstrahlen der Parallelprojektion ab. Wir bezeichnen den Winkel zwischen diesen Strahlen und der Erdachse mit θ.

Schließlich führen wir ein kartesisches Koordinatensystem ein mit dem Ursprung im Kugelmittelpunkt und der z-Achse auf der Erdachse. Die Projektionsstrahlen sollen parallel zur x,z-Ebene liegen.

Es seien die beiden Brennpunkte F_1 und F_2 die Bilder des Südpols S beziehungsweise des Nordpols N.



Bezeichnungen und Koordinatensystem

Mit diesen Bezeichnungen für die lange Halbachse:

$$a = \frac{r}{\cos(\theta)}$$

Die Brennpunkte haben die Koordinaten $F_{1,2} = (\pm c, 0, 0)$ mit $c = r\tan(\theta)$.

Somit ist:

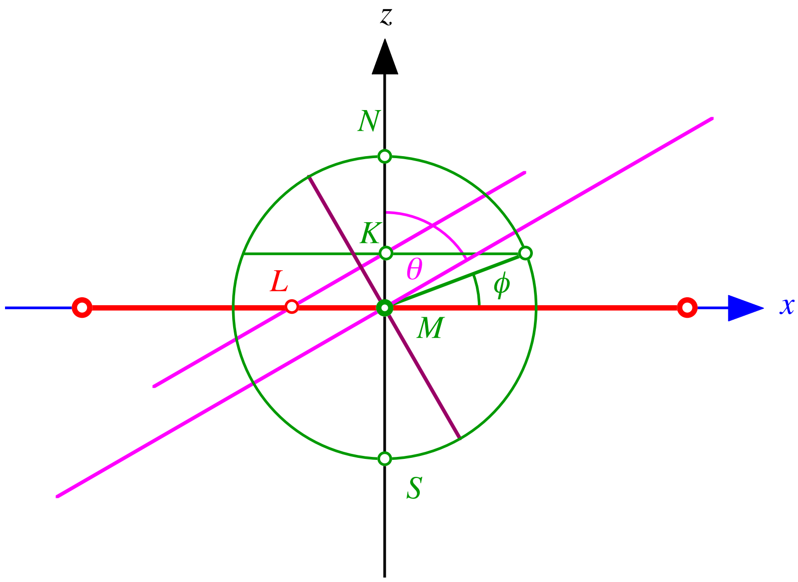
$$a^2 - b^2 = \left(\frac{r}{\cos(\theta)}\right)^2 - r^2 = r^2\left(\frac{1}{\cos^2(\theta)} - 1\right) = r^2\,\frac{1-\cos^2(\theta)}{\cos^2(\theta)} = r^2\,\frac{\sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)} = r^2\tan^2(\theta) = c^2$$

$$a^2 - b^2 = c^2$$

Der Großkreis auf der Kugel, dessen Ebene senkrecht zur Projektionsrichtung steht, ist das Urbild der Umrissellipse bei der Projektion.

3.3 Bilder der Breitenkreise

Der Breitenkreis zur geografischen Breite ϕ hat den Radius $r\cos(\phi)$. Sein Mittelpunkt K hat die Koordinaten $K = (0,0,r\sin(\phi))$. Das Bild dieses Breitenkreises hat ebenfalls den Radius $r\cos(\phi)$; für das Bild L von K erhalten wir $L = (-r\sin(\phi)\tan(\theta),0,0)$.



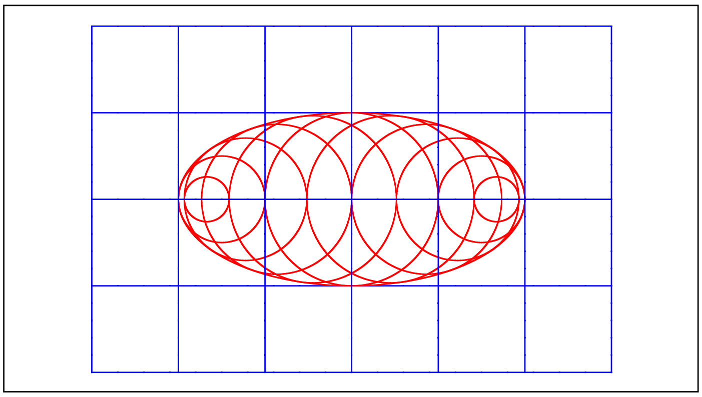
Breitenkreis

3.3.1 Kurvenschar

Die Kurvenschar

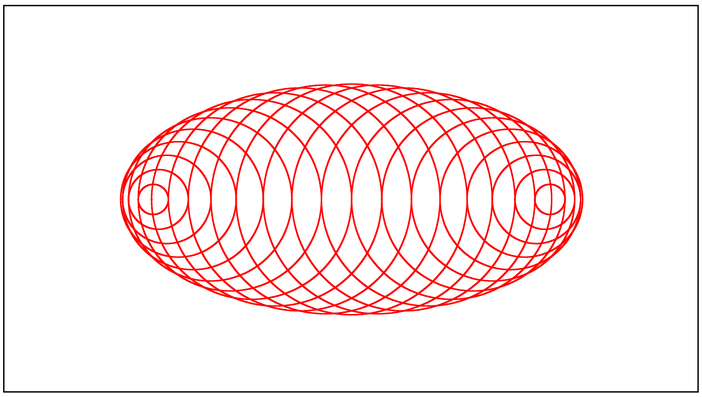
$$\left.\begin{aligned} x(t) &= -r\sin(\phi)\tan(\theta) + r\cos(\phi)\cos(t) \\ y(t) &= r\cos(\phi)\sin(t) \end{aligned}\right\} \quad t \in [0,2\pi]$$

mit dem Scharparameter $\phi \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ beschreibt also die Bilder der Breitenkreise. In der folgenden Figur ist $\theta = \frac{\pi}{3}$ und $\Delta\phi = \frac{\pi}{12}$.



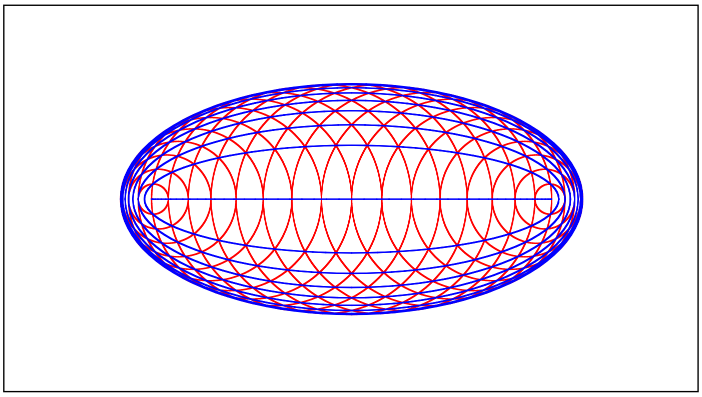
Kurvenschar

In der folgenden Figur ist $\theta = \frac{\pi}{3}$ und $\Delta\phi = \frac{\pi}{24}$.



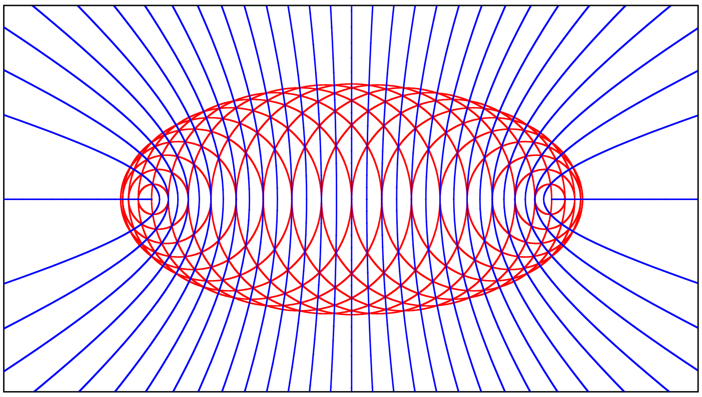
Kurvenschar, kleinerer Schritt

Wenn wir in den Netzvierecken „horizontale" Diagonalen einzeichnen, entsteht eine Schar von konfokalen Ellipsen, zu der auch die Umrissellipse gehört.



Die Fresse ist offen

Es versteht sich von selbst, dass wir bei den „vertikalen" Diagonalen eine Schar von konfokalen Hyperbeln mit denselben Brennpunkten wie die Umrissellipse erhalten.



Konfokale Hypberbelschar

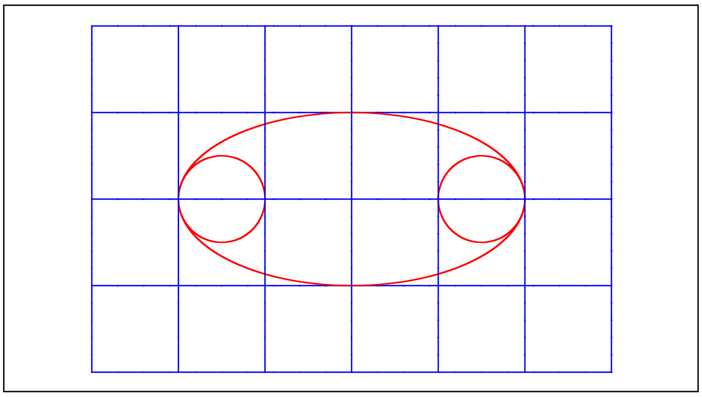
3.3.1.1 Drei Fälle

Wir haben schon festgestellt, dass einige Kreise die Umrissellipse zwei Mal berühren; das sind die Kreise für $\phi \in \left]-\theta,\theta\right[$. Die zugehörigen Breitenkreise schneiden das Urbild der Umrissellipse zwei Mal.

Im Grenzfall $\phi = \pm\theta$ erhalten wir zwei Breitenkreise, welche das Urbild der Umrissellipse berühren; die Bilder dieser Breitenkreise sind die Krümmungskreise an die Ellipse in den beiden spitzen Scheiteln. Diese beiden Krümmungskreise haben also den Radius $r\cos(\theta)$. Dabei gilt folgende Beziehung:

$$\frac{b^2}{a} = \frac{r^2}{\frac{r}{\cos(\theta)}} = r\cos(\theta)$$

Wir können also den Radius dieser Krümmungskreise durch die Halbachsen ausdrücken.

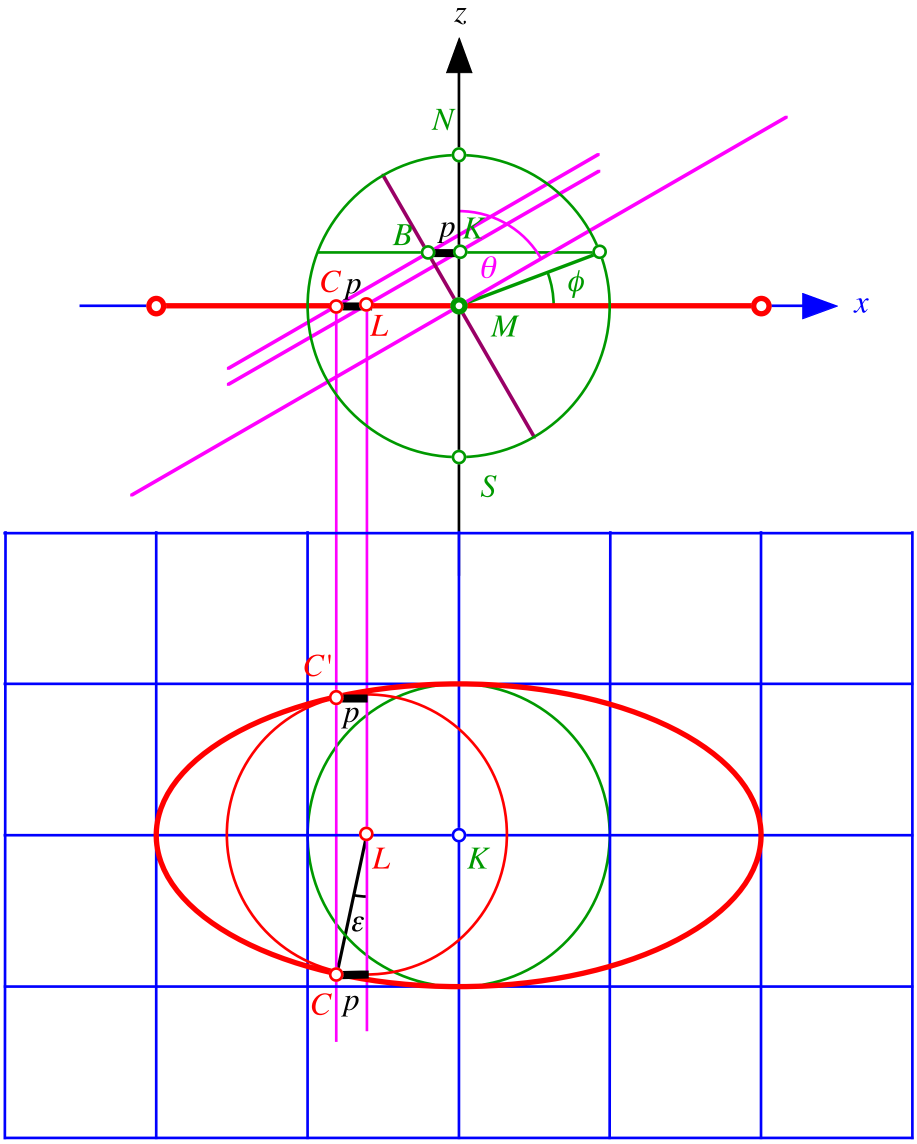


Krümmungskreise

Für $\phi \in \left[-\frac{\pi}{2},-\theta\right[\cup \left]\theta,\frac{\pi}{2}\right]$ schließlich berühren die Kreise die Umrissellipse nicht.

3.3.1.2 Berührpunkte

In welchen beiden Punkten berühren die Kreise für $\phi \in \left]-\theta,\theta\right[$ die Umrissellipse?



Berührpunkte?

Für die eingezeichnete Strecke p finden wir aus der oberen Figur:

$$p = r\sin(\phi)\frac{1}{\tan(\theta)}$$

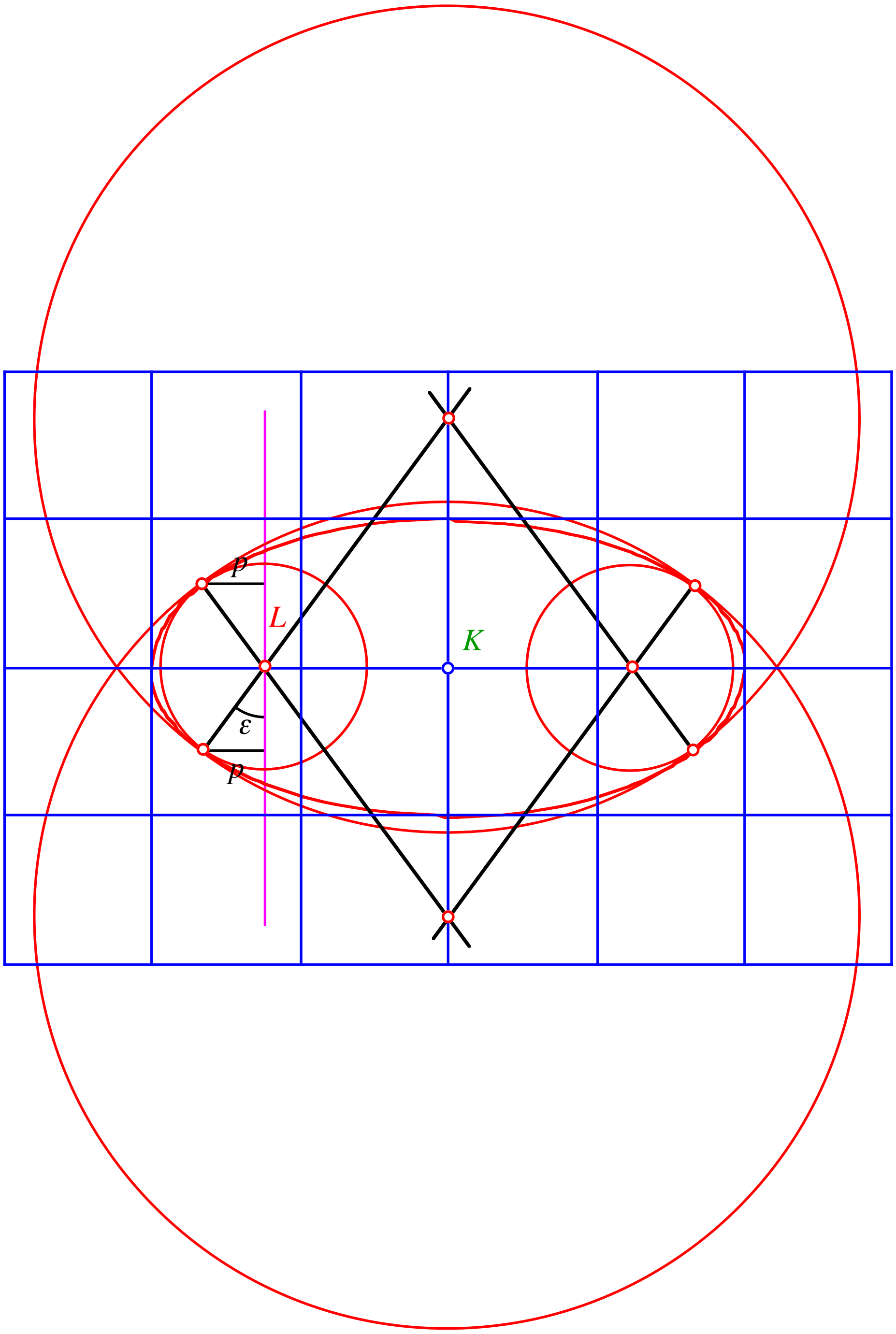
Daraus ergibt sich für den eingezeichneten Winkel ε:

$$\sin(\varepsilon) = \frac{p}{r\cos(\phi)} = \frac{r\sin(\phi)\frac{1}{\tan(\theta)}}{r\cos(\phi)} = \frac{\tan(\phi)}{\tan(\theta)}$$

Damit lassen sie die Berührungspunkte berechnen. Sie haben die Koordinaten $\left(-r\sin(\phi)\tan(\theta) - p, \pm r\cos(\phi)\cos(\varepsilon), 0\right)$.

3.3.2 Außen liegende Kreise

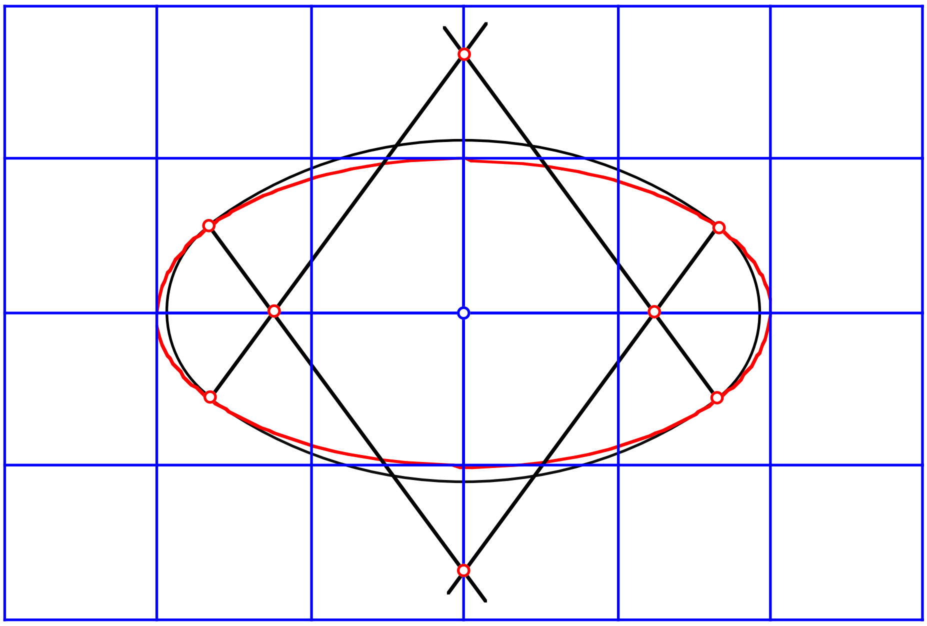
Die Idee ist nun, zu zwei symmetrischen innen liegenden Kreisen zwei außen liegende Kreise zu finden, welche die Ellipse in denselben Punkten berühren.



Außen liegende Kreise

3.3.2.1 Korbbogen

Wenn wir von den vier Kreisen nur geeignete Bögen nehmen, erhalten wir eine Approximation der Ellipse durch einen so genannten Korbbogen. Diese Approximation ist in den vier Berührpunkten exakt, auch mit exakter Tangente.



Approximation der Ellipse durch einen Korbbogen

3.3.2.2 Schar von außen liegenden Kreisen

Nach einiger Rechung erhält man für die außen liegenden Kreise die Radien:

$$r\cos(\phi)\left(\tan^2(\theta)+1\right)$$

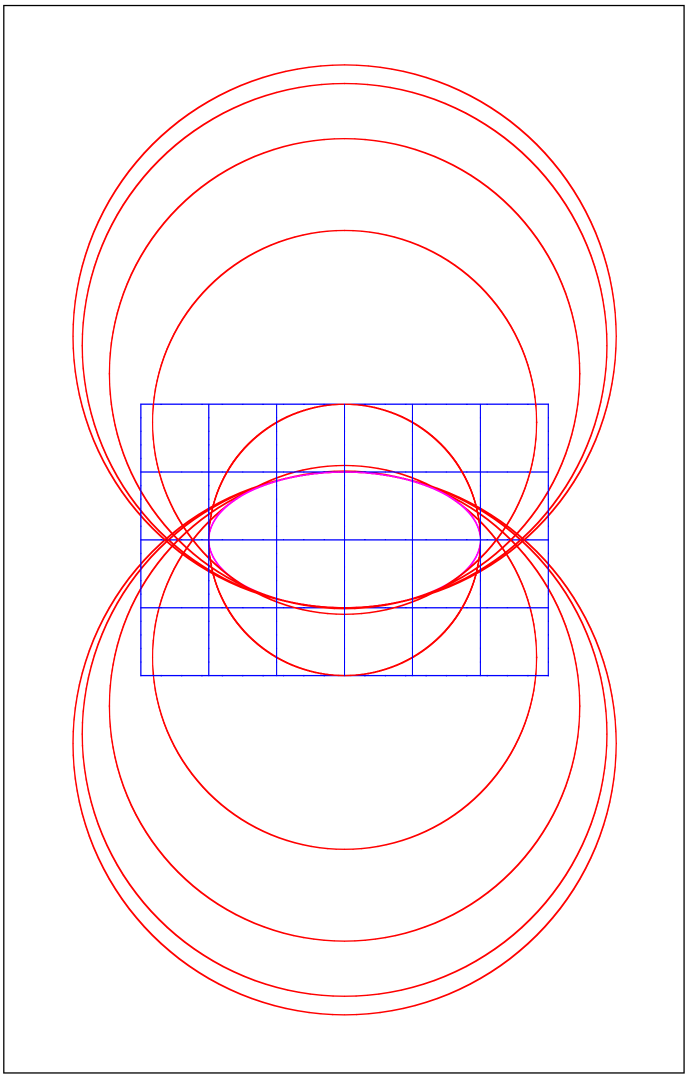
Für die Schar außen liegender Kreise ergibt sich die Parameterdarstellung:

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = r\cos(\phi)\left(\tan^2(\theta)+1\right)\cos(t) \\ y_{\text{oben}}(t) = r\cos(\phi)\tan(\theta)\sqrt{\tan^2(\theta)-\tan^2(\phi)} + r\cos(\phi)\left(\tan^2(\theta)+1\right)\sin(t) \\ y_{\text{unten}}(t) = -r\cos(\phi)\tan(\theta)\sqrt{\tan^2(\theta)-\tan^2(\phi)} + r\cos(\phi)\left(\tan^2(\theta)+1\right)\sin(t) \end{array}\right\} \quad t \in [0,2\pi]$$

Wegen dem Wurzelausdruck besteht für den Scharparameter ϕ die Bedingung:

$$\tan^2(\theta)-\tan^2(\phi) \geq 0 \quad \text{also} \quad |\phi| \leq \theta$$

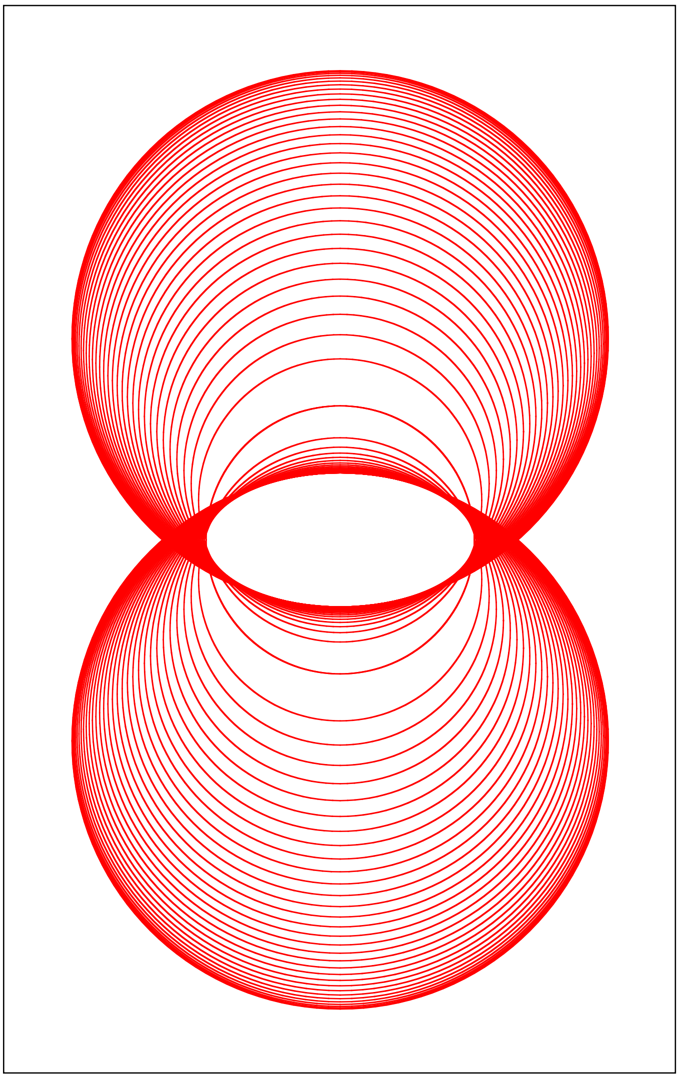
Die folgende Figur zeigt die Situation für $\theta = \frac{\pi}{3}$ und $\Delta\phi = \frac{\pi}{12}$.



Kurvenschar

Die Umrissellipse erscheint als innere Enveloppe der Kreisschar.

Die folgende Figur zeigt die Situation für $\theta = \frac{\pi}{3}$ und $\Delta\phi = \frac{\pi}{96}$.



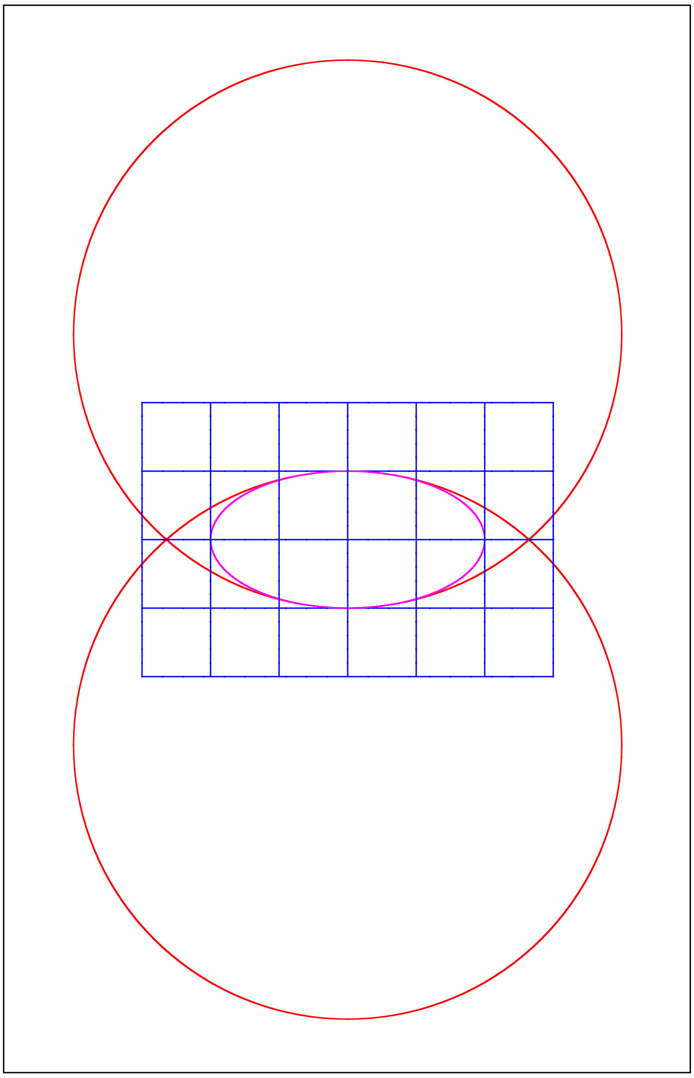
Kleinerer Schritt

3.3.2.3 Krümmungskreisee

Für $\phi = 0$ ergibt sich der Radius $r\left(\tan^2(\theta)+1\right)$. Dabei gilt die Beziehung:

$$\frac{a^2}{b} = \frac{\left(\frac{r}{\cos(\theta)}\right)^2}{r} = r\frac{1}{\cos^2(\theta)} = r\frac{\sin^2(\theta)+\cos^2(\theta)}{\cos^2(\theta)} = r\left(\tan^2(\theta)+1\right)$$

Wir erhalten für $\phi = 0$ die Krümmungskreise an den so genannten stumpfen Scheiteln der Ellipse.



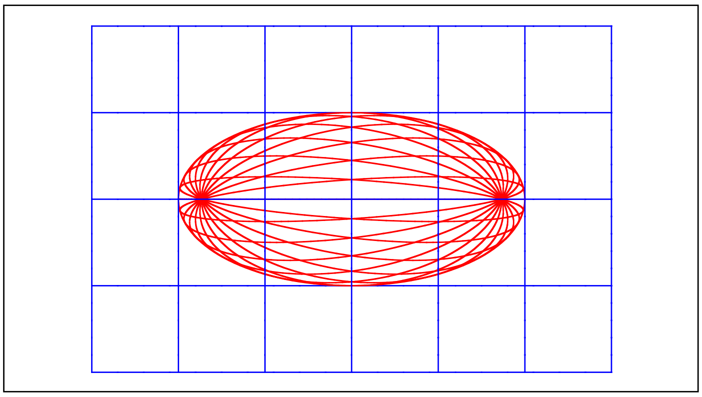
Krümmungskreise in den stumpfen Scheiteln

3.4 Bilder der Meridiane

Die Kurvenschar

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = -r\sin(t)\tan(\theta) + r\cos(t)\cos(\lambda) \\ y(t) = r\cos(t)\sin(\lambda) \end{array}\right\} \quad t \in \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right]$$

mit dem Scharparameter $\lambda \in [0, 2\pi]$ beschreibt die Bilder der Meridiane. In der folgenden Figur ist $\theta = \frac{\pi}{3}$ und $\Delta\lambda = \frac{\pi}{12}$.



Ellipsenschar

3.5 Vorgehen bei gegebener Umrissellipse

Es seien a und b die Halbachsen der vorgegebenen Umrissellipse.

Dann ist $r = b$ und $a = \frac{r}{\cos(\theta)} = \frac{b}{\cos(\theta)}$, also $\cos(\theta) = \frac{b}{a}$. Daraus ergibt sich:

$$\tan(\theta) = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b} = \frac{c}{b}$$

Die Parameterdarstellung

$$\begin{aligned} x(\phi, \lambda) &= b\cos(\phi)\cos(\lambda) - \sqrt{a^2 - b^2}\sin(\phi) \\ y(\phi, \lambda) &= b\cos(\phi)\sin(\lambda) \end{aligned}$$

beschreibt bei festem ϕ das Bild eines Breitenkreises, also einen Kreis, und bei festem λ das Bild eines Meridians, also eine (halbe) Ellipse.