Hans Walser, [20161022]

Eckige Spiralen

1 Worum geht es?

Es werden Spiralen vorgestellt, die aus rechtwinkligen Dreiecken aufgebaut sind.

2 Rekursion

Die Dreiecke werden rekursiv definiert. Bezeichnungen gemäß Abbildung 0.

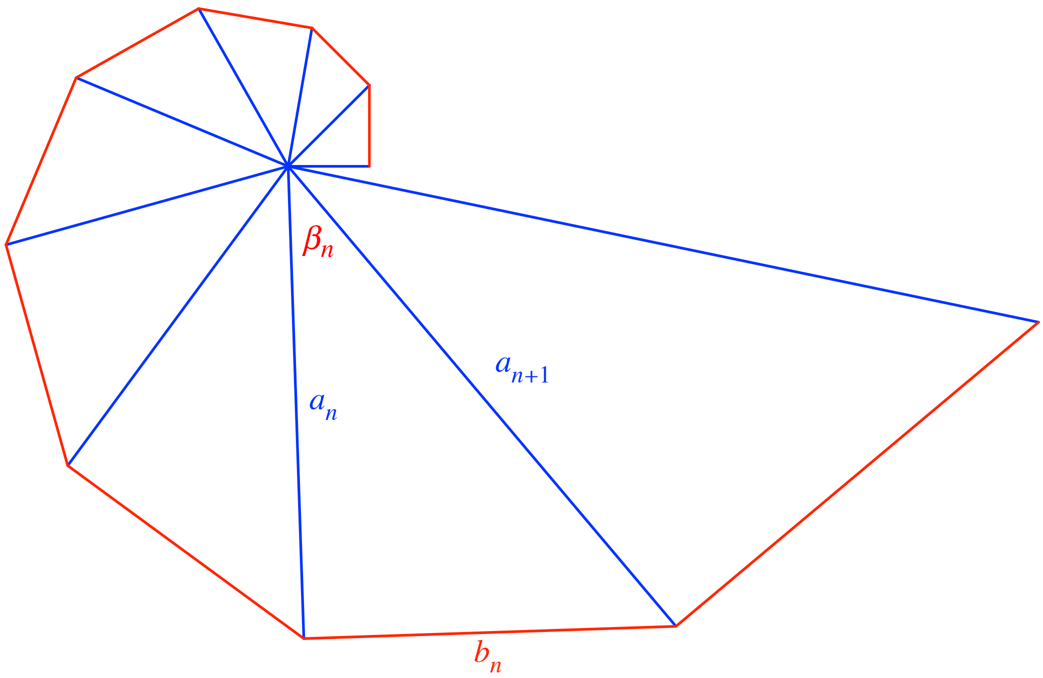

Abb. 0: Bezeichnungen

Auf jeden Fall soll für a_n die Rekursion

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \tag{1}$$

mit dem Startwert $a_0 = 1$ gelten.

Für b_n können wir irgend eine Bedingung wählen. Entsprechend ändert das Aussehen der Spirale.

3 Beispiele

3.1 Der Klassiker

Für $b_n = a_n$ ergibt sich die klassische Spirale der Abbildung 2.

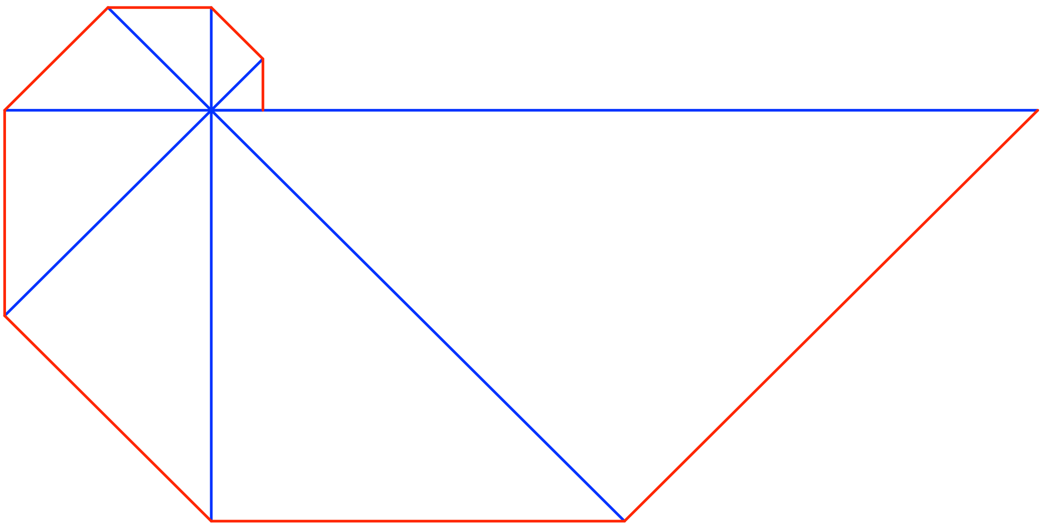

Abb. 1: Klassiker

Es ist durchgehend $\beta = 45°$. Weiter ist daher $a_{n+1} = \sqrt{2}\,a_n$. Wir haben ein exponentielles Wachstum. Die Spirale ist eine logarithmische Spirale mit folgender Drehstrecksymmetrie: Drehung um 45° mit gleichzeitiger Streckung mit $\sqrt{2}$ ist eine Deckabbildung der Spirale.

3.2 Die Wurzelspirale

Für $b_n = 1$ erhalten wir die „Wurzelspirale" (Abb. 2.1).

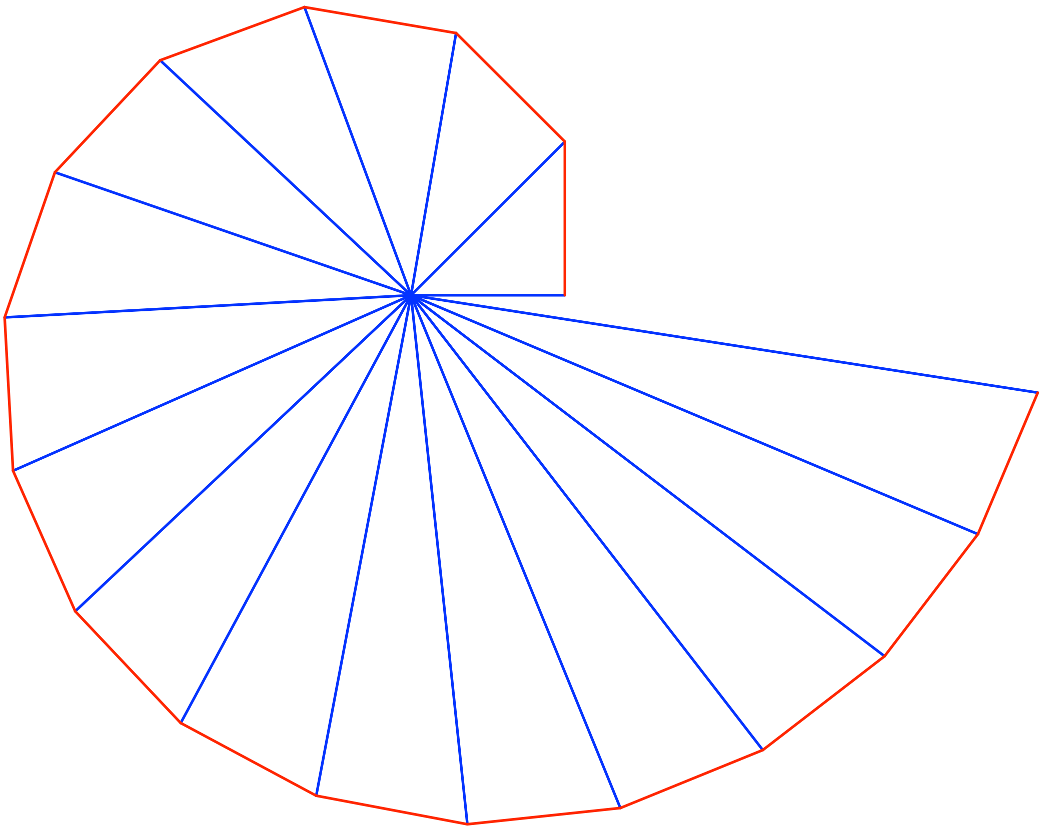

Abb. 2.1: Wurzelspirale

Es ist $a_n = \sqrt{n}$.

Die Wurzelspirale approximiert eine archimedische Spirale (Abb. 2.2):

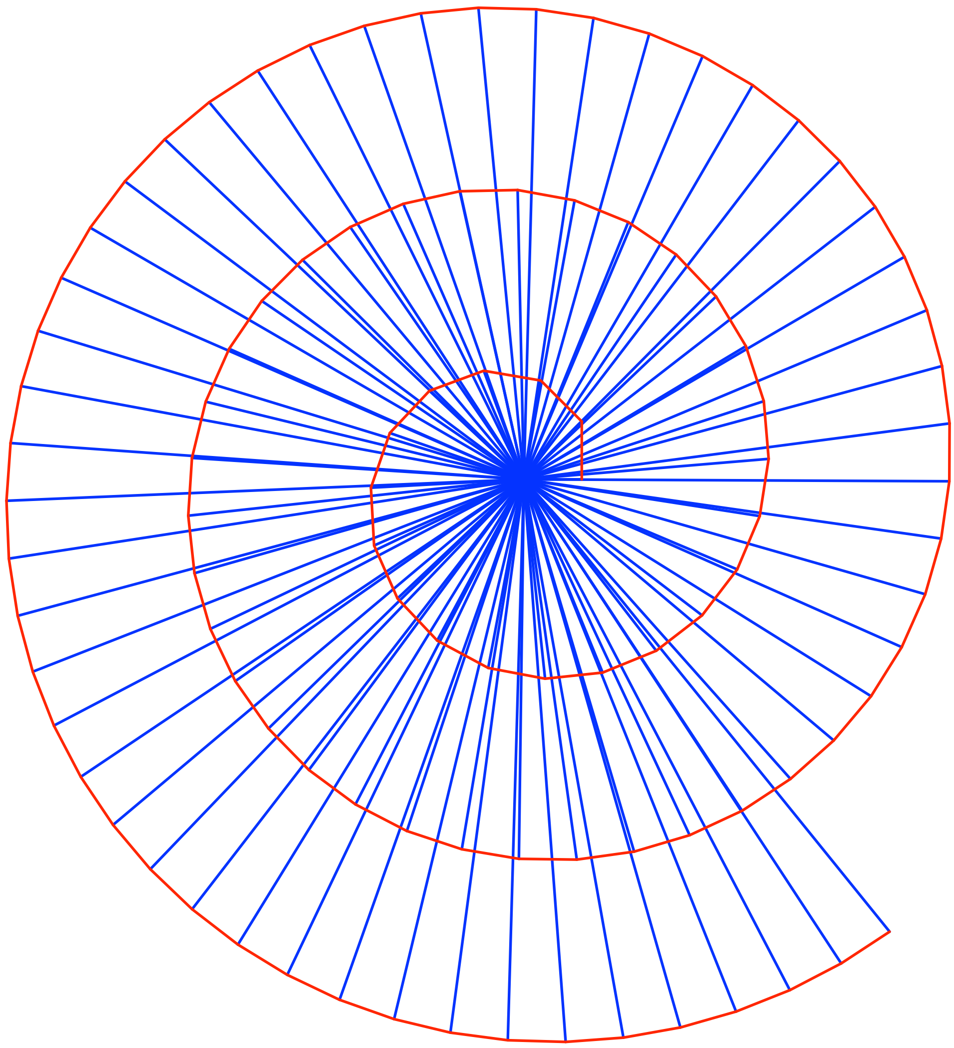

Abb. 2.2: Archimedische Spirale

3.3 Fibonacci-Spirale

Mit

$$b_n = a_{n-1} \tag{2}$$

erhalten wir die Spirale der Abbildung 3.

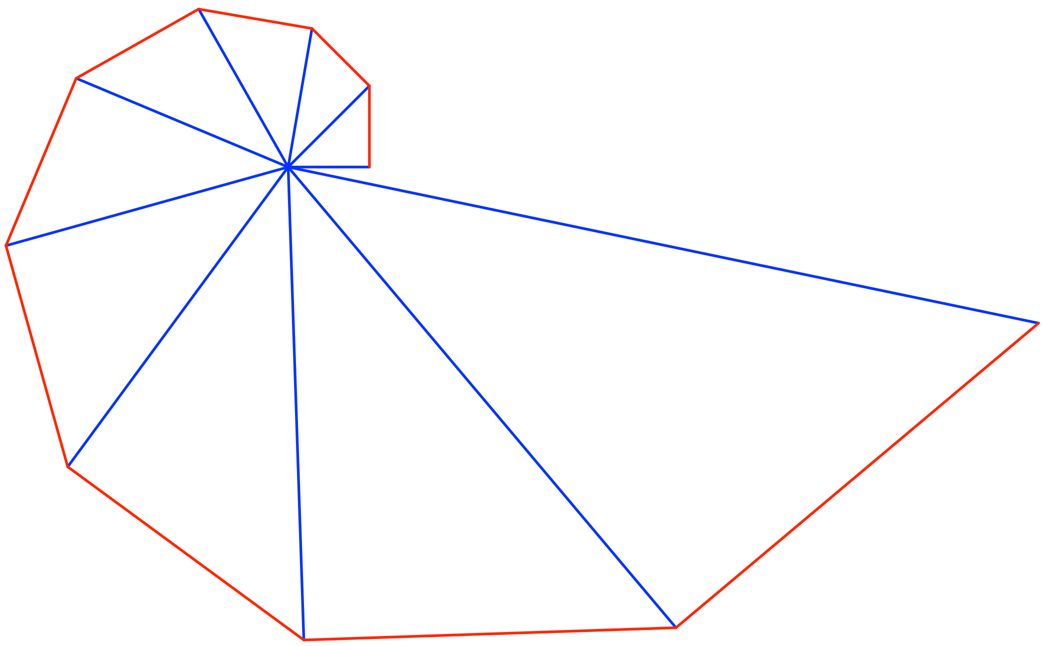

Abb. 3: Fibonacci-Spirale

Die Tabelle 1 gibt die Werte für a_n und b_n.

n	a_n	a_n^2	b_n	b_n^2	β_n
1	1.00000	1	1.00000	1	45.00000
2	1.41421	2	1.00000	1	35.26439
3	1.73205	3	1.41421	2	39.23152
4	2.23607	5	1.73205	3	37.76124
5	2.82843	8	2.23607	5	38.32882
6	3.60555	13	2.82843	8	38.11293
7	4.58258	21	3.60555	13	38.19552
8	5.83095	34	4.58258	21	38.16399
9	7.41620	55	5.83095	34	38.17604
10	9.43398	89	7.41620	55	38.17144
11	12.00000	144	9.43398	89	38.17319
12	15.26434	233	12.00000	144	38.17252
13	19.41649	377	15.26434	233	38.17278
14	24.69818	610	19.41649	377	38.17268
15	31.41656	987	24.69818	610	38.17272

Tab. 1: Daten der Fibonacci-Spirale

Offenbar ist mit der Schreibweise F_n für die Fibonacci-Zahlen:

$$a_n = \sqrt{\mathrm{F}_{n+1}}, \quad b_n = \sqrt{\mathrm{F}_n} \tag{3}$$

Daher der Name *Fibonacci-Spirale*.
Die Winkel β_n haben einen Limes:

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n = \arctan\left(\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\right) \approx 38.17271° \tag{4}$$

Hier erscheint der Goldene Schnitt. Die rechtwinkligen Dreiecke werden sich also für wachsendes n immer ähnlicher. Wir approximieren eine logarithmische Spirale.

3.4 Fibofibonacci-Spirale

Mit

$$b_n = a_{n-2} \tag{5}$$

erhalten wir die Spirale der Abbildung 4.

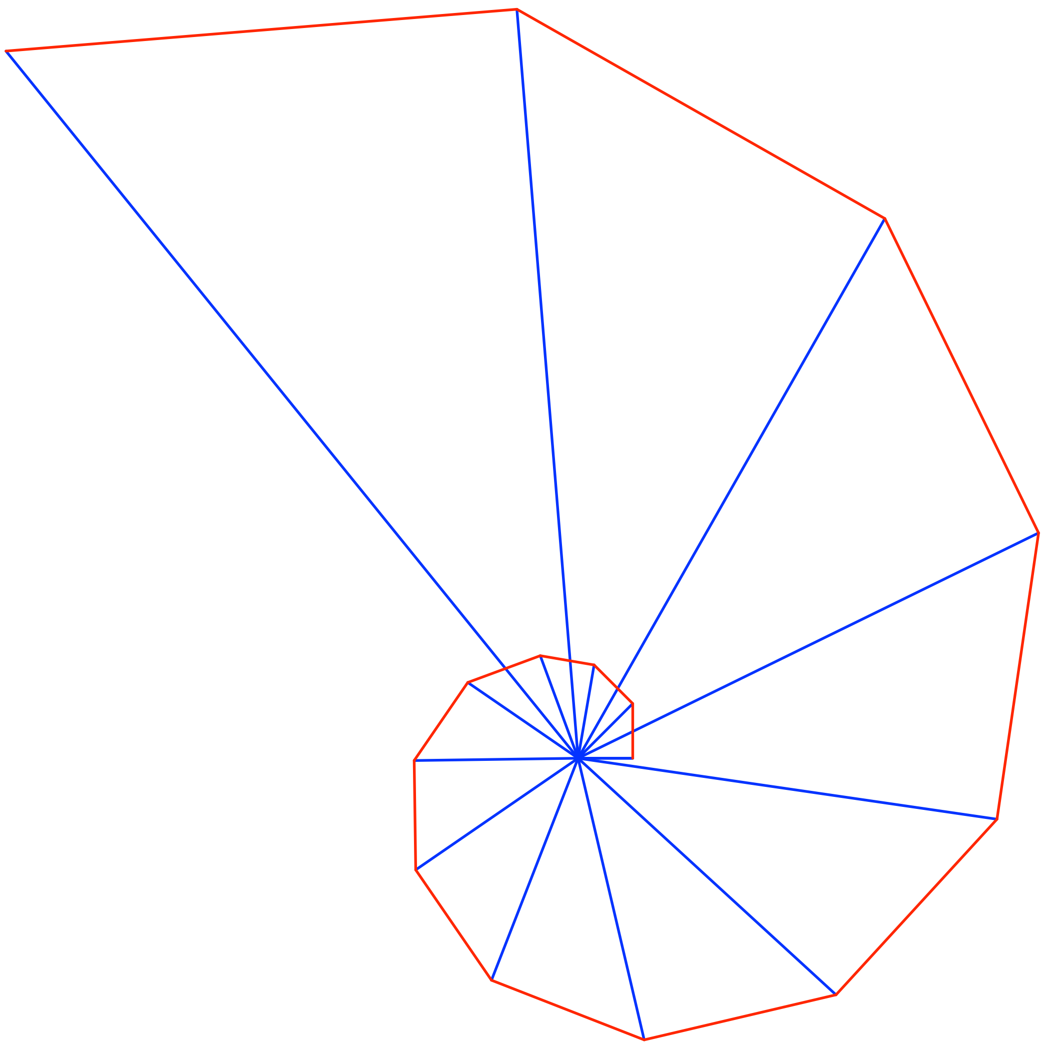

Abb. 4: Fibofibonacci-Spirale

Die Tabelle 2 gibt die relevanten Daten.

n	a_n	a_n^2	b_n	b_n^2	β_n
0	1.00000	1	0.00000	0	0.00000
1	1.00000	1	0.00000	0	0.00000
2	1.00000	1	1.00000	1	45.00000
3	1.41421	2	1.00000	1	35.26439
4	1.73205	3	1.00000	1	30.00000
5	2.00000	4	1.41421	2	35.26439
6	2.44949	6	1.73205	3	35.26439
7	3.00000	9	2.00000	4	33.69007
8	3.60555	13	2.44949	6	34.19086
9	4.35890	19	3.00000	9	34.53758
10	5.29150	28	3.60555	13	34.26994
11	6.40312	41	4.35890	19	34.24491
12	7.74597	60	5.29150	28	34.33816
13	9.38083	88	6.40312	41	34.31648
14	11.35782	129	7.74597	60	34.29377

Tab. 2: Fibofibonacci-Zahlen

Eine Schlüsselrolle spielt die Zahl:

$$\gamma = \tfrac{1}{3}\left(\frac{\sqrt[3]{116+12\sqrt{93}}}{2} + \frac{2}{\sqrt[3]{116+12\sqrt{93}}} + 1 \right) \approx 1.4656 \tag{6}$$

Dies ist die reelle Lösung der kubischen Gleichung:

$$\gamma^3 - \gamma^2 - 1 = 0 \tag{7}$$

Die Winkel β_n haben den Limes:

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n = \arctan\left(\tfrac{1}{\gamma}\right) \approx 34.3068° \tag{8}$$